

Das Spatprodukt

Klaus-R. Loeffler

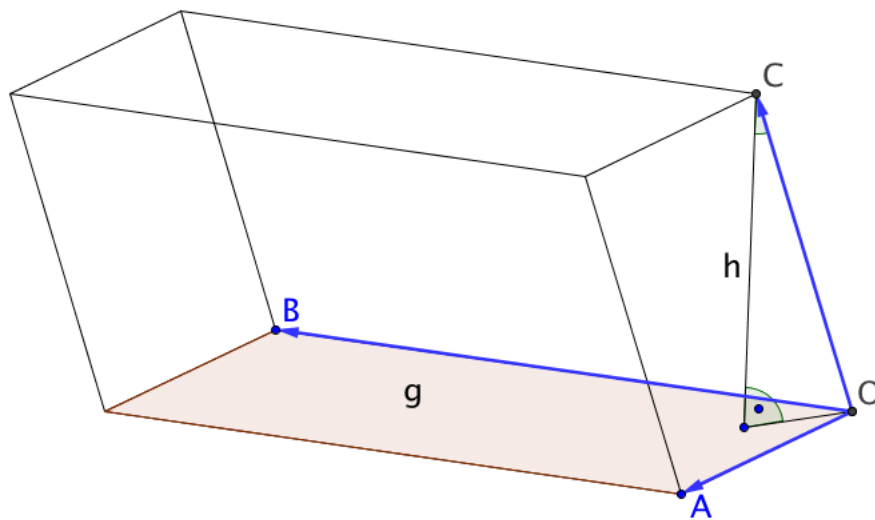
0.1 Definition und geometrische Bedeutung

Man betrachte die folgende Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Dabei wird das Bild von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ abkürzend als $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ notiert und als *Spatprodukt* der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bezeichnet.

Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so spannen sie einen nicht ausgearteten Spat auf.

Synonyme zu Spat sind *Parallelepiped* bzw. *Parallelfach*.



- Die Grundfläche des Spats ist ein Parallelogramm, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, ihr Flächeninhalt g beträgt also $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- Da die Höhe (mit Länge h) die Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$ hat, bildet sie mit dem Vektor \vec{c} einen Winkel α , dessen Kosinus den Wert $\frac{h}{|\vec{c}|}$ hat; es ist also $h = |\vec{c}| \cdot |\cos(\alpha)|$.
- Für das Volumen V des Spats gilt $V = g \cdot h$ und somit $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos(\alpha)|$;

Somit ist $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$.

0.2 Algebraische Eigenschaften

- (1) Das Spatprodukt von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lässt sich als Determinante der Matrix errechnen, deren Spalten aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bestehen; sind also $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$ die Komponenten der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, so hat man:

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \\ &= a_1 \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 \cdot (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- (2) Das Spatprodukt ist invariant gegenüber zyklischer Vertauschung und geht bei Vertauschung von zwei der Operanden in die Gegenzahl über:

- $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}]; \quad [\vec{c} \ \vec{b} \ \vec{a}] = [\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}] = [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b}]$
- $[\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}] = -[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$

Der Beweis folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der Determinante oder durch Nachrechnen mit Komponenten analog zum Nachweis von (1).

0.3 Ergänzungen (ohne Beweise)

0.3.1 Lineare (3,3)-Gleichungssysteme: Cramersche Regel

Fasst man beim linearen Gleichungssystem $\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{matrix}$ die Koeffizienten spaltenweise zusammen zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, so gilt:

Genau dann hat das Gleichungssystem genau ein Lösungstriplel (x, y, z) , wenn das Spatprodukt $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ verschieden von null ist; im Falle $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \neq 0$ ist das Lösungstriplel $\left(\frac{[\vec{d} \ \vec{b} \ \vec{c}]}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}, \frac{[\vec{a} \ \vec{d} \ \vec{c}]}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}, \frac{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}]}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]} \right)$.

0.3.2 Multiplikationssatz für Spatprodukte

Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ Vektoren des Raums \mathbb{R}^3 , so gilt die folgende Identität:

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \cdot [\vec{d} \ \vec{e} \ \vec{f}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{a} \cdot \vec{f} \\ \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{f} \\ \vec{c} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{f} \end{vmatrix}.$$