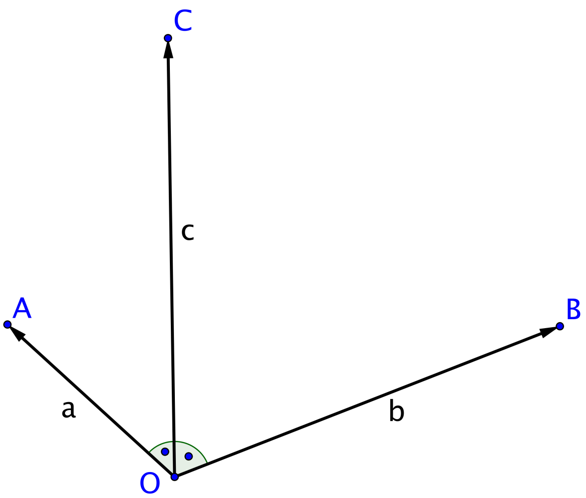
Das Kreuzprodukt

Klaus-R. Loeffler

0.1 Problem und Hinführung

Zu zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ des Raums $\mathbb{R}^3$ wird ein Vektor $\vec{c}$ gesucht, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist.



Eine triviale Lösung, welche die Bedingungen $\vec{a} * \vec{c} = \vec{o} \wedge \vec{b} * \vec{c} = \vec{o}$ erfüllt, ist offenbar $\vec{c} = \vec{o}$.
Mit den Komponenten-Bezeichnungen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

ist dann notwendig und hinreichend für die verlangte Eigenschaft von $\vec{c}$:

(1) $\quad a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$

(2) $\quad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0.$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit b_1 und der zweiten mit $-a_1$ erhlt man

$$a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 = 0 \wedge -a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 = 0$$

Addition der Gleichungen eliminiert c_1 und ergibt

$$(a_2b_1 - a_1b_2)c_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 = 0$$

So wie in der Gleichung $ax + by = 0$ sofort die spezielle Lösung $(x, y) = (b, -a)$ abzulesen ist, sieht man hier als spezielle Lösung

$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad c_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Einsetzen von c_2 und c_3 in (1) ergibt nach Zusammenfassen und Ausklammern

$$a_1b_1(c_1 - a_2b_3 + a_3b_2) = 0.$$

Diese Gleichung ist offensichtlich erfüllt, wenn c_1 den Wert $a_2b_3 - a_3b_2$ hat.

Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ ist also orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Bezeichnung: Der derart aus den Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammengesetzte Vektor wird in der Form $\vec{a} \times \vec{b}$ notiert. Man hat damit eine weitere Verknüpfung von Vektoren definiert, für die man das Operationszeichen $\times$ (gelesen „kreuz“) verwendet:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

0.2 Rechenregeln beim Kreuzprodukt

Das Ergebnis der in (3) definierten Verkknüpfung wird *Kreuzprodukt* (oder *Vektorprodukt*) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt. Dabei rechtfertigt sich die Bezeichnung als Produkt z.B.aus den nachfolgend in Kurznotation aufgeführten Rechenregeln 3. und 4. (in der Art von Distributiv- bzw. Assoziativgesetz):

1. $\bigwedge_{\vec{a}\in\mathbb{R}^3} \vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$
2. $\bigwedge_{\vec{a}\in\mathbb{R}^3} \bigwedge_{\vec{b}\in\mathbb{R}^3} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\bigwedge_{\vec{a}\in\mathbb{R}^3} \bigwedge_{\vec{b}\in\mathbb{R}^3} \bigwedge_{\vec{b}\in\mathbb{R}^3} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $\bigwedge_{r\in\mathbb{R}} \bigwedge_{\vec{a}\in\mathbb{R}^3} \bigwedge_{\vec{b}\in\mathbb{R}^3} (r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b})$

Der einfache Nachweis der Eigenschaften erfolgt durch Einsetzen der Komponenten gemäß der Definition.

0.3 Ein Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt

Berechnet man mithilfe der Komponenten $(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} * \vec{b})^2$, so erhält man

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix})^2$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Nach dem Auflösen der Klammern heben sich die Terme der Form $2a_ia_jb_ib_j(i,j = 1,2,3; i \neq j)$ gegenseitig auf, so dass bleibt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} * \vec{b})^2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{3} b_j^2 = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2$$

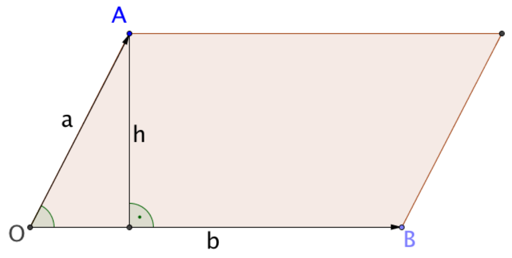
Somit ist

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_i^2 b_j^2 = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - (\vec{a} * \vec{b})^2.$$

Bezeichnet man mit α den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel, dann ist $\vec{a} * \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$,

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 \cdot \sin^2(\alpha),$$

und daher $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot |\sin(\alpha)|$.



Wird mit α im oben dargestellten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm der Winkel BOA bezeichnet, dann beträgt die Höhe $h = ||\vec{a}|| \cdot \sin(\alpha)$; für den Flächeninhalt F erhält man also

$$F = ||\vec{b}|| \cdot h = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\alpha) = ||\vec{a} \times \vec{b}||.$$