Integrierbarkeit und Integral

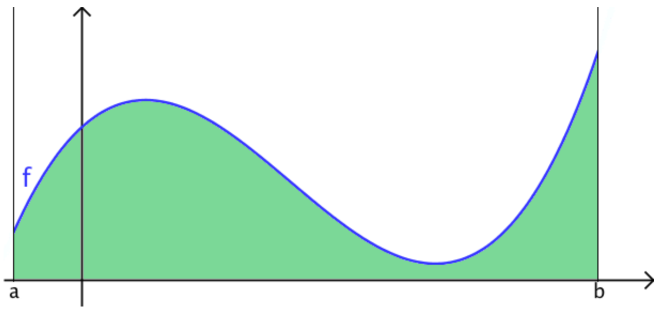
Klaus-R. Loeffler

Inhaltsverzeichnis

1 Die Definition des (Riemannschen) Integrals

1.1 Hinführung

Eine Grundaufgabe, die zur Integralrechnung führt, ist die Berechnung des Inhalts eines Flächenstücks, dessen Rand nicht nur aus Strecken besteht.
Während sich der Inhalt eines Vielecks - bei gegebenen Koordinaten der Ecken - mit Hilfe einer Zerlegung in Dreiecke leicht berechnen lässt, scheint die Lösung der entsprechenden Aufgabe bei nicht geradlinig berandeten Flächenstücken anfangs allenfalls näherungsweise möglich. Dabei wird sich die Betrachtung zunächst auf solche Fläechen im Koordinatensystem beschränken, deren Rand aus zwei parallelen Strecken zur y-Achse, einer Strecke auf der x-Achse und einem Funktionsgraphen besteht.



Das Ziel ist, den Inhalt einer solchen Fläche zunächst mit einer gewünschten Genauigkeit, also innerhalb einer vorgegebenen Fehlerschranke zu berechnen, dann aber natürlich möglichst exakt anzugeben. Dabei wird zunächst in naiver Weise offen gelassen, ob sich der Flächeninhalt überhaupt durch eine reelle Zahl beschreiben lässt. Dazu werden zunächst einige grundlegende Begriffe bereitgestellt.

1.2 Grundlegende Begriffe und Zusammenänge

1.2.1 Beschränktheit von Funktionen und abgeschlossene Intervalle

Eine Menge A reeller Zahlen heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl s gibt, die von keinem Element von A übertroffen wird; analog heißt die Menge *nach unten beschränkt*, wenn kein Element der Menge kleiner als eine geeignete reelle Zahl t ist. s und t werden in diesem Fall als *obere Schranke* bzw. *untere Schranke* der Menge bezeichnet.
Als *beschränkt* wird die Menge bezeichnet, wenn sie sowohl nach oben wie nach unten beschränkt it.
Ist s obere Schranke einer Menge A, und ist z größer als s, ist (aufgrund der Transitivität der Ordnungsrelation) auch z eine obere Schranke von A; die analoge Aussage gilt für untere Schranken.
Hat die Menge der oberen Schranken einer Menge A ein Minimum, so wird diese kleinste obere Schranke als *Supremum* von A bezeichnet, in Zeichen: $\sup A$.
Um den Supremumsbegriff formal auf alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, also auch nach oben unbeschränkte Mengen und die leere Menge, erweitert man die Kandidaten für untere bzw. obere Schranken formal um die uneigentlichen Elemente $-\infty$ und ∞ mit der Anordnung

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} -\infty < x < \infty.$$

Für jede Menge A reeller Zahlen gilt mit dieser formalen Schreibweise

$$\sup A = \infty \Leftrightarrow A \text{ nach oben nicht beschränkt;} \quad \sup A = -\infty \Leftrightarrow A = \emptyset$$

Eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen besteht darin, dass jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum hat.

Unter einem *abgeschlossenen Intervall* $[p; q]$ versteht man für $p, q \in \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, die nicht kleiner als p und nicht größer als q sind, also die Menge aller x, welche die Ungleichung $p < x < q$ erfüllen.
Das Supremum einer Funktion f mit Argumentmenge A, bezeichnet als $\sup f$, ist das Supremum von $f(A)$, also das Supremum aller Funktionswerte:

$$f : A \to \mathbb{R}; \quad \sup f := \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Ist A die Vereinigung von zwei Mengen A_1 und A_2, f eine Funktion mit Argumentmenge A, und sind $f|_{A_1}$ und $f|_{A_2}$ die Einschränkungen von f auf A_1 bzw. A_2, dann gilt: $\sup f = \max\{\sup f|_{A_1}, \sup f|_{A_2}\}$.
Denn da jede obere Schranke von A auch eine obere Schranke von A_1 und A_2 ist, gilt

$$\sup A_i \leq \sup A \quad (i = 1, 2), \qquad \text{also} \qquad \max\{\sup A_1, \sup A_2\} \leq \sup A.$$

Gälte aber $\max\{\sup A_1, \sup A_2\} \leq \sup A$, wäre jede reelle Zahl x mit

$$\max\{\sup A_1, \sup A_2\} < x < \sup A$$

zwar eine obere Schranke zu A_1 und zu A_2, aber nicht zu A, was nicht möglich ist.
Die analogen Aussagen gelten für die kleinste untere Schranke, das *Infimum* einer Menge A und das Infimum einer Funktion f, in Zeichen: $\inf A$ bzw. $\inf f$. Da für jede f mit einer Argumentmenge $A \neq \emptyset$ für jedes $x \in A$ gilt

$$\inf f \leq f(x) \leq \sup f,$$

giltt für jede nicht leere Funktion f : $\quad \inf f \leq \sup f; \quad \inf f = \sup f \Leftrightarrow f$ konstant.

1.2.2 Zerlegungen eines Intervalls

Unter einer Zerlegung eines Intervalls $[a; b]$ versteht man eine endliche isotone Folge reeller Zahlen, deren erstes Glied a und deren letztes Glied b ist. Die Zerlegung lässt sich also in der folgenden Form darstellen:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b.$$

Damit ergibt sich das gesamte Intervall $[a; b]$ als Vereinigungsmenge aller Teilintervalle $[x_{i-1}; x_i]$, wobei i die positiven ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft. Die Länge eines Intervalls $[x_{i-1}; x_i]$ errechnet sich als $x_i - x_{i-1}$; bei der Zerlegung wird keine strenge Isotonie verlangt, aufeinanderfolgende Glieder der Zerlegungsfolge müssen nicht immer verschieden sein. Die Teilintervalle können also zu Mengen aus nur einem Punkt ausarten; die Länge dieser Intervalle ist dann natürlich 0.
Für eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$ wird die Länge des größten Teilintervalls als *Feinheit der Zerlegung Z* bezeichnet, in Zeichen $\sigma(Z)$.
Zerlegt man das Intervall speziell in n Teilintervalle gleicher Länge, dann wird für $i = 1, 2, 3, ..., n$ der i-te Zerlegungspunkt offenbar erhalten als $x_i = a + (i - 1) \cdot \frac{b-a}{n}$.

Beispiele: (1) Eine Zerlegung des Intervalls $[1; 3]$ ist z.B. $Z_1 = (1, 1.5, 2, 2.1, 2.8, 2.9, 3)$,

(2) die Zerlegung von $[1; 3]$ in 5 Teilintervalle gleicher Länge ist $Z_2 = (1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3)$.

Die Feinheit der Zerlegung beträgt im ersten Beispiel 1.5, im zweiten 0.4 .

Unter einer *Verfeinerung* Z_2 einer Zerlegung Z_1 versteht man eine Zerlegung Z_2 des gleichen Intervalls, unter deren Zerlegungspunkten sich alle Zerlegungspunkte von Z_1 befinden. Daß eine Zerlegung Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 ist, wird auch in der Form $Z_2 \supseteq Z_1$ notiert, gelesen als Z_2 *ist feiner als* Z_1.
Zwar nimmt die Feinheit bei einer Verfeinerung der Zerlegung nicht notwendigerweise ab, für zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt aber offensichtlich

$$Z_2 \supseteq Z_1 \Rightarrow \sigma(Z_2) \leq \sigma(Z_1).$$

1.2.3 Unter- und Obersummen

Zu einer auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definierten Funktion f erklärt man für eine Zerlegung Z von $[a;b]$ die *Untersumme* von f zur Zerlegung Z (Bezeichnung: $U(f,Z)$ und die *Obersumme* von f zur Zerlegung Z auf die folgende Weise:

$$U(f,Z) := \sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1};x_i]\},$$
$$O(f,Z) := \sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1};x_i]\}.$$

Beispiele Für die auf dem Intervall $[1;3]$ betrachtete Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2$ ergeben sich mit den oben als Beispiel angegebenen Zerlegungen folgende Unter- bzw. Obersummen:

$$U(f,Z_1) = 0.5 \cdot 12 + 0.5 \cdot .22 + 0.1 \cdot 22 + 0.7 \cdot 2.12 + 0.1 \cdot 2.82 + 0.1 \cdot 2.92 = 7.212$$
$$O(f,Z_2) = 0.4 \cdot 1.42 + 0.4 \cdot 1.82 + 0.4 \cdot 2.22 + 0.4 \cdot 2.62 + 0.4 \cdot 32 = 10.32$$

Bei der Berechnung wurde verwendet, dass der Graph von f (ein Ausschnitt aus dem rechten Ast der Normalparabel) über dem betrachteten Intervall monoton steigt, sein Supremum und sein Infimum also jeweils am rechten bzw. linken Teilintervallende annimmt,

Ist f eine beschränkte Funktion über $[a;b]$ und sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a;b]$, wobei Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 ist, dann gilt:

$$O(f,Z_2) \leq O(f,Z_1).$$

Es genügt, den Nachweis für eine Zerlegung $Z_1 = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$ und eine Zerlegung Z_2 zu führen, die aus Z_1 durch Hinzunahme eines einzigen Zerlegungspunktes entsteht, da die Richtigkeit der allgemeineren Behauptung dann durch Induktion folgt.
Es sei also k ein Index, für den der für Z_2 hinzugenommene Zerlegungspunkt z im Intervall $[x_{k-1};x_k]$ liegt, also $Z_2 = (a, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_{n-1}, b)$.

$$\begin{aligned}
O(f,Z_2) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (x_1 - x_{i-1}) \cdot \sup f|_{[x_{i-1};x_i]} + (z - x_{k-1}) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};z]} + (x_k - z) \cdot \sup f|_{[z;x_k]} \\
&\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (x_1 - x_{i-1}) \cdot \sup f|_{[x_{i-1};x_i]} + (z - x_{k-1}) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};x_k]} + (x_k - z) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};x_k]} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (x_1 - x_{i-1}) \cdot \sup f|_{[x_{i-1};x_i]} + (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};x_k]} = O(f,Z_1)
\end{aligned}$$

Analog ist zu zeigen

$$\sigma(Z_2) \supseteq \sigma(Z_1) \Rightarrow U(f,Z_2) \geq U(f,Z_1).$$

Um eine obere Schranke für die Differenz von $O(f,Z_1)$ und $O(f,Z_2)$ zu erhalten, schätzt man mit $s := \sup\{|f(x)| \quad | \quad x \in [a;b]\}$ ab:

$$\begin{aligned}
O(f,Z_1) - O(f,Z_2) &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};x_k]} - (z - x_{k-1}) \cdot \sup f|_{[x_{k-1};z]} \\
&\quad -(x_k - z) \cdot \sup f|_{[z;x_k]} \\
&= (z - x_{k-1}) \cdot (\sup f|_{[x_{k-1};x_k]} - \sup f|_{[x_{k-1};z]}) + (x_k - z) \cdot (\sup f|_{[x_{k-1};x_k]} - \sup f|_{[z;x_k]}) \\
&\leq (z - x_{k-1}) \cdot 2s + (x_k - z) \cdot 2s = (x_k - x_{k-1}) \cdot 2s
\end{aligned}$$

Bei Einfügen einer weiteren Zerlegungsstelle z ins Intervall $[x_{k-1}; x_k]$ kann also die Obersumme nicht um mehr als $2s \cdot (x_k - x_{k-1})$ abnehmen.
Daraus folgt: Ist $Z_1 = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a;b]$, und ist Z eine Verfeinerung von Z_1, die durch Hinzunahme von n Zerlegungspunkten entsteht, dann gilt mit $s := \sup\{|f(x)| \quad | \, x \in [a;b]\}$:

(1) $\quad O(f, Z_1) - O(f, Z) \leq 2n \cdot s \cdot \sigma(Z)$

1.3 Unter- und Oberintegral. Definition des Integrals

Ist f eine beschränkte Funktion über $[a;b]$ und sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a;b]$, wobei Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 ist, dann gilt:

(2) $\quad U(f, Z_1) \leq U(f, Z_2) \leq O(f, Z_2) \leq O(f, Z_1).$

Hieraus folgt, dass für beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 stets $U(f, Z_1) \leq O(f, Z_2)$ gilt; somit ist die Menge aller Untersummen $U(f, Z)$, wobei Z Zerlegung von $[a;b]$ ist, nach oben durch $O(f, Z_1)$ beschränkt, wobei Z_1 eine beliebige Zerlegung von $[a;b]$ ist.
Die Menge $U(f) := \{U(f, Z) | Z \text{ Zerlegung von } [a;b]\}$ hat als nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum; der Wert dieses Supremums wird als *Unterintegral* von f bezeichnet.
Entsprechend definiert man das *Oberintegral* von f als $\inf\{O(f, Z) | Z \text{ Zerlegung von } [a;b]\}$.
Bezeichnung: Wir bezeichnen das Unterintegral von f mit $\underline{\mathrm{I}}(f)$, das Oberintegral von f mit $\overline{I}(f)$.

$$\underline{\mathrm{I}}(f) := \sup\{U(f, Z) | Z \text{ Zerlegung von } [a;b]\}; \quad \overline{I}(f) := \inf\{O(f, Z) | Z \text{ Zerlegung von } [a;b]\}.$$

Wegen (1) gilt immer $\underline{\mathrm{I}}(f) \leq \overline{I}(f)$

Beispiele

1. Für die auf dem Intervall $[1;3]$ konstante Funktion f mit der Gleichung $f(x) = k$ ergeben sich mit den oben als Beispiel angegebenen Zerlegungen folgende Unter- bzw. Obersummen:
$$U(f, Z_1) = 0.5 \cdot k + 0.5 \cdot .k + 0.1 \cdot k + 0.7 \cdot k + 0.1 \cdot k + 0.1 \cdot k = 2k$$
$$O(f, Z_2) = 0.4 \cdot k + 0.4 \cdot k + 0.4 \cdot k + 0.4 \cdot k + 0.4 \cdot k = 2k$$
Wegen $\underline{\mathrm{I}}(f) \geq U(f, Z_1) = 2k = O(f, Z_2) \geq \overline{I}(f) \geq \underline{\mathrm{I}}(f)$ ergibt sich: $\quad \underline{\mathrm{I}}(f) = 2k = \overline{I}(f)$.
2. Für die auf dem Intervall $[1;3]$ durch
$$\bigwedge_{x \in [1;3]} x = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \text{ irrational ist} \\ 1, \text{ wenn } x \text{ rational ist} \end{cases}$$
definierte Funktion f ergibt sich für jede Zerlegung Z des Intervalls $[1;3]$:

   $U(f, Z) = 0, \quad O(f, Z) = 1$, also $\underline{\mathrm{I}}(f) = 0; \quad \overline{I}(f) = 2.$

   Bei der Berechnung wurde verwendet, dass der Graph von f (ein Ausschnitt aus dem rechten Ast der Normalparabel) über dem betrachteten Intervall monoton steigt, sein Supremum und sein Infimum also jeweils am rechten bzw. linken Teilintervallende annimmt,

Die Beispiele zeigen, dass die Fälle $\underline{\mathrm{I}}(f) = \overline{I}(f)$ und $\underline{\mathrm{I}}(f) < \overline{I}(f)$ beide vorkommen. Im Falle der Gleichheit heißt die Funktion *integrierbar* und der gemeinsame Wert von $\underline{\mathrm{I}}(f)$ und $\overline{I}(f)$ wird als *Integral* von f bezeichnet, in Zeichen $I(f)$.

1.4 Kriterium für Integrierbarkeit

Haben zwei Mengen A, B reeller Zahlen die Eigenschaft, dass kein Element von A größer ist als ein Element von B (in Zeichen $A \leq B$), dann folgt, wie schon bei der Darstellung zu Unter- und Oberintegral verwendet: $supA \leq infB$, und es gilt

$$\sup a = \inf B \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \bigvee_{a \in A} \bigvee_{b \in B} b - a < \varepsilon.$$

Angewendet auf die Existenz des Integrals einer auf einem Intervall $a; b$ definierten Funktion f ergibt dies das *Riemannsche Integrabilitätskriterium*:
Genau dann ist f integrierbar, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Zerlegung Z des Intervalls $[a; b]$ gibt, für die sich die zugehörigen Ober- und Untersummen um weniger als ε unterscheiden.
Äquivalent zu dieser Bedingung für Integrierbarkeit ist offenbar die Existenz einer Folge (Z_n) von Zerlegungen des Argumentintervalls, für welche $(O(f, Z_n) - U(f, Z_n))_n$ eine Nullfolge ist.
Mit (1) aus dem Abschnitt zu Ober- und Untersummen lässt sich der folgende Hilfssatz zeigen:

Hilfssatz Ist f eine auf $[a; b]$ definierte und integrierbare Funktion, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ mit folgender Eigenschaft: Für jede Zerlegung Z von $[a; b]$, deren Feinheit kleiner als δ ist, gilt: $O(f; Z) - I(f) < \varepsilon$.

Beweis Da f integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $Z_1(= (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Intervalls $[a; b]$ mit $O(f, Z_1) - I(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann leistet $\delta := \frac{\varepsilon}{4n \cdot s}$ das Verlangte.

Ist nämlich $s := \sup\{|f(x)| \quad | \ x \in [a; b]\}$, Z eine beliebige Zerlegung von $[a; b]$ mit $\sigma(Z) < \delta$, und ist Z_2 die Verfeinerung von Z_1, die durch Hinzunahme aller Teilungsstellen aus Z entsteht, so hat man nach (1)

$$(3) \qquad O(f, Z) - O(f, Z_2) \leq 2n \cdot s \cdot \sigma(Z) \leq 2n \cdot s \cdot \delta = 2n \cdot s \cdot \frac{\varepsilon}{4n \cdot s} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 ist, gilt

$$(4) \qquad O(f, Z_2) - I(f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit (2) und (3) folgt

$$(5) \qquad O(f, Z) - I(f) = (O(f, Z) - O(f, Z_2)) + (O(f, Z_2) - I(f)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Analog zu beweisen ist: Ist f eine auf $[a; b]$ definierte und integrierbare Funktion, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ mit folgender Eigenschaft: Für jede Zerlegung Z von $[a; b]$, deren Feinheit kleiner als δ ist, gilt: $O(f; Z) - I(f) < \varepsilon$.

Aus dem angegebenen Hilfssatz folgt:
Ist f eine auf $[a; b]$ definierte und integrierbare Funktion, und ist $(Z_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$, für die $(\sigma(Z_n))$ eine Nullfolge ist, so konvergieren die Folgen $U(f, Z_n)$ und $O(f; Z_n)$ gegen das Integral von f.
Wählt man bei einer Zerlegung $Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für jedes Intervall $[x_{i-1}; x_i]$ einen Zwischenpunkt ξ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, so erhält man mit $Z^* = (x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, x_2, \ldots, \xi_n, x_n)$ eine *Zerlegung mit Zwischenpunkten.*
Unter der zugehörigen *Zwischensumme* zu einer solchen Zerlegung mit Zwischenpunkten versteht man

$$S(f, Z^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ist f eine auf $[a; b]$ definierte und integrierbare Funktion, und ist $(Z_n^*)_n$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$ mit Zwischenpunkten, für die $(\sigma(Z_n))$ eine Nullfolge ist, so konvergieren die Folgen $S(f, Z_n^*)$ gegen das Integral von f.

2 Integrierbare Funktionen

2.0.1 Klassen integrierbarer Funktionen

In diesem Abschnitt wird die Menge der auf $[a;b]$ definierten und integrierbaren Funktionen mit $\mathbb{F}$ bezeichnet. Weiterhin sei k eine von 0 verschiedene reelle Zahl, f und g seien Funktionen mit der Argumengmenge $[a;b]$. Dann gelten folgende Aussagen über Integrierbarkeit:

(0) $\bigwedge_{x\in[a;b]} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f \in \mathbb{F} \quad \wedge \quad I(f) = 0)$

(1) $f \in \mathbb{F} \quad \Rightarrow \quad (k \cdot f \in \mathbb{F} \quad \wedge \quad I(k \cdot f) = k \cdot I(f))$

(2) $f, g \in \mathbb{F} \quad \Rightarrow \quad (f + g \in \mathbb{F} \quad \wedge \quad I(f + g) = I(f) + I(g))$

(3) $f \in \mathbb{F} \quad \Rightarrow \quad (|f| \in \mathbb{F} \ \wedge \ I|(f)| \leq I(|f|))$

Dabei ist mit $|f|$ nicht etwa eine irgendwie definierte Norm von f im Vektorraum $\mathbb{F}$ gemeint, sondern die Funktion, die an der Stelle $x \in [a;b]$ den Wert $|f(x)|$ annimmt.

(4) Liegt die reelle Zahl c im Intervall $[a;b]$, so ist f genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a;c]}$ und $f|_{[c;b]}$ integrierbar sind. Im Falle der Integrierbarkeit gilt

$$I(f) = I(f|_{[a;c]}) + I(f|_{[c;b]}).$$

(5) $f, g \in \mathbb{F} \quad \Rightarrow \quad \max(f, g) \in \mathbb{F}$

Dabei ist mit $\max(f, g)$ die Funktion auf $[a;b]$ gemeint, die an jeder Stelle x des Argumentintervalls den Funktionswert $\max\{f(x), g(x)\}$ annimmt.

(6) f monoton $\Rightarrow f \in \mathbb{F}$

(7) f stetig $\Rightarrow f \in \mathbb{F}$

Bemerkung: Innerhalb des Vektorraums aller auf $[a;b]$ definierten Funktionen bilden also die integrierbaren nach (0)..(2) einen Untervektorraum, zu dem das Bilden des Integrals eine lineare Abbildung in die reellen Zahlen ist.

Beweise

Zu (0) Für jede Zerlegung Z gilt $U(f, Z) = O(f, Z) = 0$.

Zu (1) Zunächst wird zusätzlich vorausgesetzt, dass k positiv ist. Zu vorgegebenem positiven ε gibt es dann eine Zerlegung Z mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \frac{\varepsilon}{k}$.

Dann folgt $O(k \cdot f, Z) - U(k \cdot f, Z) = k \cdot (O(f, Z) - U(f, Z)) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

$k \cdot f$ ist also integrierbar. Ist nun (Z_n^*) eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a;b]$ mit Zwischenpunkten, so konvergiert $S(f, Z_n^*)$ gegen $I(f)$; wegen

$$\lim_{n\to\infty} S(k \cdot f, Z_n^*) = \lim_{n\to\infty} k \cdot S(f, Z_n^*) = k \cdot \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n^*) = k \cdot I(f)$$

ist $I(k \cdot f) = k \cdot I(f)$.

Zusammen mit f ist auch $-f$ integrierbar, und es ist $I(-f) = -I(f)$. Denn für jede Zerlegung Z gilt

$$U(-f, Z) = -O(f, Z) \quad \wedge \quad O(-f, Z) = -U(f, Z)$$

und daher

$$O(-f, Z) - U(-f, Z) = -U(f, Z) - (-O(f, Z)) = O(f, Z) - U(f, Z).$$

Wegen $k \cdot f = -1 \cdot (-k) \cdot f$ und (0) gilt die Aussage (1) für alle reellen Zahlen k.

Zu (2) Für jede Zerlegung Z des Intervalls $[a;b]$ gilt

$$\begin{aligned}O(f+g,Z)-U(f+g,Z) &\leq O(f,Z)+O(g,z)-(U(f,Z)+U(g,Z))\\ &= O(f,Z)-U(f,Z)+O(g,Z)-U(g,Z),\end{aligned}$$

denn

$$\bigwedge_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}} \Big(\bigwedge_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)+g(x) \leq \sup f|[x_{i-1};x_i] + \sup g|[x_{i-1};x_i]$$
$$\Rightarrow \sup(f+g)|[x_{i-1};x_i] \leq \sup f|[x_{i-1};x_i] + \sup g|[x_{i-1};x_i]\Big).$$

Die Abschätzung $U(f+g,Z) \geq U(f,Z)+U(g,Z)$ ist analog zu zeigen.

Ist also Z_n eine Folge von Zerlegungen des Intervalls, für die $(\sigma(Z_n))$ eine Nullfolge ist, so konvergiert mit $(O(f,Z_n)-U(f,Z_n)$ und $(O(g,Z_n)-U(g,Z_n)$ auch $(O(f+g,Z_n)-U(f+g,Z_n)$ gegen null. Also ist $f+g$ integrierbar.

Und da für jede Zerlegung Z^* mit Zwischenpunkten gilt $S(f+g,Z^*)=S(f,Z^*)+S(g,Z^*)$ folgt: $I(f+g)=I(f)+I(g)$.

Zu (3) Für jede Teilmenge T von $[a;b]$ gilt

$$\sup\{|f(x)| \mid x\in T\} - \inf\{|f(x)| \mid x\in T\} \leq \sup\{f(x) \mid x\in T\} - \inf\{f(x) \mid x\in T\}.$$

Daher gilt für jede Zerlegung Z des Intervalls $[a;b]$

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} (O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon \implies O(|f|,Z)-U(|f|,Z)<\varepsilon).$$

Die Integrierbarkeit von f zieht also die Integrierbarkeit von $|f|$ nach sich.

Ist Z^* eine Zerlegung des Intervalls $[a;b]$ mit Zwischenpunkten, so gilt:

$$\bigwedge_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}} f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) \leq |f(\xi_i)|\cdot(x_i-x_{i-1}),$$

also

$$|S(f,Z^*)| \leq S(|f|,Z^*) \qquad \text{und mithin} \quad |I(f)| \leq I(|f|).$$

Zu (4)

- f integrierbar $\Rightarrow$ ($f|_{[a;c]}$ integrierbar $\wedge$ $f|_{[c;b]}$ integrierbar),

  denn zu vorgegebenem positivem ε gibt es zunächst eine Zerlegung Z von $[a;b]$ mit $O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$. Da die Differenz von Ober- und Untersumme bei Hinzunahme eines weiteren Zerlegungspunktes nicht zunimmt, darf o.B.d.A. angenommen werden, dass c ein Zerlegungspunkt ist, die Zerlegung sich also darstellen lässt in der Form $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$ mit $x_0=a,\ x_m=c,\ x_n=b$.

  Mit $Z_1=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_m)$ und $Z_2=(x_m,x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)$ gilt für die Zerlegungen Z_1,Z_2

  $$O(f|_{[a;c]},Z_1)-U(f|_{[a;c]},Z_1) \leq O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon,$$
  $$O(f|_{[c;b]},Z_2)-U(f|_{[c;b]},Z_2) \leq O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon.$$

- ($f|_{[a;c]}$ integrierbar $\wedge$ $f|_{[c;b]}$ integrierbar) $\Rightarrow$ f integrierbar

  Zu vorgegebenem positivem ε gibt Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a;c]$ bzw. $[c;b]$ mit

  $$O(f|_{[a;c]},Z_1)-U(f|_{[a;c]},Z_1)<\frac{\varepsilon}{2} \quad\wedge\quad O(f|_{[c;b]},Z_2)-U(f|_{[c;b]},Z_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

  Für die durch Vereinigen der Zerlegungspunkte aus Z_1 mit denen von Z_2 entstehende Zerlegung Z gilt dann:

  $$\begin{aligned}O(f,Z)-U(f,Z) &= O(f|_{[a;c]},Z_1)+O(f|_{[c;b]},Z_2)-(U(f|_{[a;c]},Z_1)+U(f|_{[c;b]},Z_2))\\ &= O(f|_{[a;c]},Z_1-U(f|_{[a;c]},Z_1)+O(f|_{[c;b]},Z_2)-U(f|_{[c;b]},Z_2)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Durch Betrachtung von Zerlegungen mit Zwischenpunkten von $[a;c]$ und von $[c;b]$ ergibt sich analog zum Nachweis von (2): $I(f|_{[a;c]}) + I(f|_{[c;b]}) = I(f)$.

Zu (5) Der Nachweis ergibt sich wegen

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} \max(f(x), g(x)) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

aus (1), (2) und (3).

Zu (6) Der Nachweis wird zunächst für eine isotone Funktion angegeben.

Für die Zerlegung $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von $[a;b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge $d_n = \frac{b-a}{n}$ ist

$$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot d_n \quad \wedge \quad O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot d_n,$$

also

$$\begin{aligned} O(f,Z) - U(f,Z) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot d_n - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot d = (f(b) - f(a)) \cdot d_n \\ &= (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \quad \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Der Beweis für eine antitone Funktion f ergibt sich durch Betrachtung der dann isotonen Funktion -f als aus Folgerung aus (1) für $k = -1$.

Zu (7) Für die Zerlegung $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in n Teilintervalle gleicher Länge $d_n = \frac{b-a}{n}$ ist

$$\begin{aligned} O(f,Z) - U(f,Z) &= \sum_{i=1}^{n} \sup f|_{[x_{i-1};x_i]} \cdot d_n - \sum_{i=1}^{n} \inf f|_{[x_{i-1};x_i]} \cdot d_n \\ &= d_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (\sup f|_{[x_{i-1};x_i]} - \inf f|_{[x_{i-1};x_i]}) = d_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (\max f|_{[x_{i-1};x_i]} - \min f|_{[x_{i-1};x_i]}). \end{aligned}$$

Da eine auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion dort sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem positiven ε eine positive Zahl δ mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{x,y\in[a;b]} (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ist also bei vorgegebenem positiven ε_1 die Zahl δ in obigem Sinne geeignet für $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$, wähle man die natürliche Zahl n größer als $\frac{b-a}{\delta}$. Für die Zerlegung $Z_n = (x_0, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ des Intervalls $[a;b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge gilt dann mit $d_n := \frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned} O(f,Z_n) - U(f,Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} (\max f|_{[x_{i-1};x_i]} - \min f|_{[x_{i-1};x_i]}) \cdot d_n \\ &< d_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1 = d_n \cdot n \cdot \varepsilon_1 = \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Integrierbarkeit von f gezeigt.

2.0.2 Beispiele integrierbarer Funktionen

(i) Die auf dem Intervall $[a;b]$ mit dem konstanten Wert k definierte Funktion f ist integrierbar und hat das Integral $I(f) = k \cdot (b-a)$.

Denn für jede Zerlegung Z von $[a;b]$ ist $U(f,Z) = O(f,Z) = k \cdot (b-a)$.

(ii) Die auf einem Intervall $[a;b]$ durch $\bigwedge_{x\in[a;b]} p_k(x) := x^k$ definierte Potenzfunktion k-ten Grades ist integrierbar, und es gilt $I(p_k) = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

Die Richtigkeit dieser Aussage ergibt sich an späterer Stelle wesentlich einfacher als Folgerung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; sie wird hier nur für den speziellen Fall $0 < a < b$ gezeigt.

Mit $q_n := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ betrachte man zur Zerlegung $Z_n = (a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, b)$ die Zerlegung Z_n^* mit Zwischenpunkten, die aus Z_n entsteht, wenn jeweils das linke Ende des Teilintervalls als Zwischenpunkt gewählt wird.

Da die Folge $(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})$ gegen 1 konvergiert, ist $(\sigma(Z_n))$ wegen $aq_n^{i-1} - aq_n^i = aq_n^{i-1}\cdot(1-q_n)$ eine Nullfolge. Mithin konvergiert die Folge $S(p_n, Z_n^*)$ gegen das (aufgrund der Stetigkeit von p_k existierende) Integral von p_k.

$$\begin{aligned}
S(p_k, Z_n^*) = \sum_{i=1}^{n} p_k(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(aq_n^{i-1})^k\cdot(aq_n^i - aq_n^{i-1})\\
= a^{k+1}\sum_{i=1}^{n}(q_n^k)^{i-1}\cdot q_n^{i-1}\cdot(q_n-1) &= a^{k+1}\cdot(q_n-1)\sum_{i=1}^{n}(q_n^k)^{i-1}\cdot q_n^{i-1}\\
= a^{k+1}\cdot(q_n-1)\sum_{i=1}^{n}(q_n^{k+1})^{i-1} &= a^{k+1}\cdot(q_n-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q_n^{k+1})^{i}\\
= a^{k+1}\cdot(q_n-1)\frac{(q_n^{k+1})^n-1}{q_n^{k+1}-1} &= a^{k+1}\cdot(q_n-1)\cdot\frac{(q_n^n)^{k+1}-1}{(q_n-1)\cdot\sum_{\kappa=0}^{k} q_n^\kappa}\\
= a^{k+1}\cdot\frac{(\frac{b}{a})^{k+1}-1}{\sum_{\kappa=0}^{k} q_n^\kappa} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{\sum_{\kappa=0}^{k} q_n^\kappa} \to \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{\sum_{\kappa=0}^{k} 1^\kappa} &= \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

(iii) Die auf dem Intervall $[a;b]$ betrachtete ganzrationale Funktion f mit einer Gleichung der Form $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist als stetige Funktion integrierbar und hat nach (i) sowie (1) und (2) das Integral $I(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}$.

(iv) Definiert man die Funktion f auf dem Intervall $[0;1]$ durch

$$\bigwedge_{x\in[0;1]} x = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \text{ irrational ist,}\\ \frac{1}{q}, \text{ wenn } x \text{ rational ist mit reduzierter Darstellung } \frac{p}{q}, \end{cases}$$

dann ist f integrierbar mit $I(f) = 0$.

Für jede Zerlegung Z von $[0;1]$ hat $U(f,Z)$ den Wert 0. Zu zeigen ist also nur, dass es zu jedem positiven ε eine Zerlegung Z gibt mit $O(f,Z) < \varepsilon$.

Zum Nachweis wähle man eine natürliche Zahl k, die größer als $\frac{2}{\varepsilon}$ ist. An allen rationalen Stellen, die nicht in der Menge $M = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \ldots \frac{k-1}{k}\}$ wird ein Funktionswert angenommen, der kleiner als $\frac{1}{k}$, also kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.

Ist nun m die Mächtigkeit der Menge M, so lege man um jedes der Elemente von M ein Intervall der Breite $\frac{\varepsilon}{2m}$; die hierbei auftretenden Intervallenden werden in einer Zerlegung Z mit Zerlegungspunkten $(x_0, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ zusammengefasst. Für diese Zerlegung gilt dann

$$O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n}\{\sup f|_{[x_{i-1};x_i]} | M\cap[x_{i-1};x_i] \neq \emptyset\} + \sum_{i=1}^{n}\{\sup f|_{[x_{i-1};x_i]} | M\cap[x_{i-1};x_i] \neq \emptyset\}$$

$$< m\cdot\frac{\varepsilon}{2m} + 1\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(v) Ist für die auf $[a;b]$ definierte Funktion f die Menge $\{x \in [a;b] \mid f(x) \neq 0\}$ endlich, so ist f integrierbar und hat das Integral 0.

Nur für den Fall, dass f nicht die Nullfunktion ist, muss etwas gezeigt werden.

Ist n die Anzahl der Stellen, an denen die Funktion f verschwindet, und s eine obere Schranke von $|f|$, dann betrachte man zu vorgegebenem positivem ε die Zerlegung Z, bei der um jede der n Stellen mit $f(x) \neq 0$ ein Intervall gelegt wird, dessen Länge kleiner als $\frac{\varepsilon}{s \cdot n}$ ist. Dann ist

$$O(f,Z) - U(f,Z) < n \cdot s \cdot \frac{\varepsilon}{s \cdot n} = \varepsilon.$$

2.1 Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Nachfolgend sei f eine auf einem Intervall $[a;b]$ definierte, integrierbare Funktion.

E(1): Nimmt f an keiner Stelle einen negativen Wert an, ist auch $I(f)$ nicht negativ. Denn zu keiner Zerlegung Z ist die zugehörige Untersumme negativ; es gilt also : $0 \leq U(f,Z) \leq I(f)$.

E(2): Ist g eine auf $[a;b]$ integrierbare Funktion mit $f \leq g$ (also $\bigwedge_{x\in[a;b]} f(x) \leq g(x)$), dann folgt $I(f) \leq I(g)$.

Die lineare Abbildung $I : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist also (bezüglich der Halbordnung $\leq$ in $\mathbb{F}$ isoton.

Da auch $g-f$ integrierbar ist, ergibt sich der Beweis als Folgerung aus E(1); denn wegen $g-f \geq 0$ folgt

$$I(g) = I(g-f) + I(f) \geq I(f).$$

E(3): $|I(f)| \leq (b-a) \cdot \sup |f|$

Denn wendet man E(2) auf die Funktion g mit dem konstanten Funktionswert $\sup |f|$ an, so folgt wegen $f \leq g$

$$I(f) \leq I(g) = (b-a) \cdot \sup |f|$$

und daher (wegen $(b-a) \cdot \sup |f| \geq 0$)

$$|I(f)| \leq (b-a) \cdot \sup |f|.$$

E(4): Ist f stetig und nimmt an keiner Stelle einen negativen Wert an, so gilt: $\max f > 0 \Leftrightarrow I(f) > 0$. Da die Nullfunktion, wie schon gezeigt, das Integral 0 hat, ist nur zu beweisen, dass die Existenz einer Stelle $c \in [a;b]$ mit $f(c) > 0$ nach sich zieht, dass $I(f)$ positiv ist.

Ist $f(c)$ positiv, so gibt es aufgrund der Stetigkeit von f in $[a;b]$ ein Teilintervall $[a_1;b_1]$ positiver Länge, über dem keine kleineren Funktionswerte als $\frac{f(c)}{2}$ angenommen werden. Für die Zerlegung $Z = (a, a_1, b_1, b)$ gilt dann

$$\begin{aligned} I(f) \geq U(f,Z) &= (a_1 - a) \cdot \max f|_{[a;a_1]} + (b_1 - a_1) \cdot \max f|_{[a_1;b_1]} + (b - b_1) \cdot \max f|_{[b_1;b]} \\ &\geq 0 + (b_1 - a_1) \max f|_{[a_1;b_1]} + 0 \geq (b_1 - a_1) \cdot \frac{f(c)}{2} > 0. \end{aligned}$$

2.2 Klassische Integralnotation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Für eine auf dem Intervall $[a;b]$ definierte, integrierbare Funktion f lässt sich - wie oben gezeigt - das Integral als Grenzwert einer Folge von Zwischensummen erhalten. Ist nämlich $(Z_m^*)_m$ eine Folge von Zerlegungen des Argumentintervalls mit Zwischenpunkten, deren Feinheit mit wachsendem n gegen 0 strebt, so erhält man mit
$Z_n^* = (x_{m,0}, \xi_{m,1}, x_{m,1}, \xi_{m,2}, x_{m,2}, \dots, \xi_{m,n_m}, x_{m,n_m})$ und $d_{m,i} = x_{m,i} - x_{m,i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n_m)$:

$$I(f) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{m,i}) \cdot d_{m,i}.$$

An diese Darstellung erinnert die folgende Integralnotation, die nicht nur deshalb zweckmäßig ist, weil man zur Notation nur den Funktionsterm braucht und nicht jeder Funktion zum Integrieren einen Namen geben muss, sondern auch aus vielen anderen Gründen praktisch ist:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Bei der Einschränkung des Definitionsintervalls $[a;b]$ auf ein Teilintervall $[a_1;b_1]$ kann man entsprechend kürzer notieren:

$$\text{nicht} \int_{a_1}^{b_1} f|_{[a_1;b_1]}(x)\ \mathrm{d}x, \quad \text{sondern} \int_{a_1}^{b_1} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

3 Integralfunktionen und Hauptsatz

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Integrierbarkeit einer auf einem Intervall $[a;b]$ integrierbaren Funktion f für jede Stelle x dieses Intervalls die Integrierbarkeit von $f|_{[a;x]}$ nach sich zieht. Man kann daher eine zugehörige *Integralfunktion* $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} F(x) := I(f_{[a;x]}) \qquad \left(= \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

3.1 Eigenschaften von Integralfunktionen - Teil 1

Nachfolgend sei stets vorausgesetzt, dass f eine integrierbare Funktion auf $[a;b]$ ist; F sei die im Sinne der obigen Definition zugehörige Integralfunktion.

1. $F(a) = 0$; jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

2. Wenn f keine negativen Werte annimmt, ist F isoton, denn für x, y aus der Argumentmenge mit $x \le y$ gilt

$$F(y) - F(x) = I(f_{[a;y]}) - I(f_{[a;x]}) = I(f_{[x;y]}) \ge 0.$$

3. F ist an jeder Stelle c des Intervalls $[a;b]$ stetig. Zum Nachweis genügt es zu zeigen, dass für jede monotone Folge (c_n) in $[a;b]$, die gegen c konvergiert, die Folge $(F(c_n))$ den Grenzwert $F(c)$ hat. Der kurze Nachweis wird für eine antitone Folge (c_n) ergibt sich mit

$$|F(c_n) - F(c)| = |I(f|_{[c;c_n]})| \le I(|f||_{[c;c_n]}) \le (c_n - c) \cdot \max|f| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

und analog für isotone Folgen

$$|F(c_n) - F(c)| = |I(f|_{[c_n;c]})| \le I(|f||_{[c_n;c]}) \le (c - c_n) \cdot \max|f| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

3.2 Erweiterung der Integralnotation

Die Zusammenfassung der Differenz $F(c) - F(d)$ zweier Werte einer Integralfunktion F ergibt

$$\int_d^c f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad -\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x,$$

je nachdem, ob d kleiner als c ist oder nicht. Die sonst erforderliche Fallunterscheidung entfällt, wenn man den bisher für $c < d$ nicht definierten Ausdruck $\int_d^c f(x)\mathrm{d}x$ erklärt durch

$$\int_d^c f(x)\ \mathrm{d}x := -\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Warnung: Nach der Erweiterung der Bedeutung von $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Gleichsetzung mit $I(f|_{[c;d]})$ nur im Falle $c \leq d$ möglich, da zweite Ausdruck sonst undefiniert ist.

3.3 Eigenschaften von Integralfunktionen - Teil 2

4. Ist f an der Stelle c stetig, dann ist die zugehörige Integralfunktion an der Stelle differenzierbar und es gilt $F'(c) = f(c)$.

   Beweis: Wegen $f(c) \cdot (x - c) = f(c) \cdot \int_c^x 1\mathrm{d}t = \int_c^x f(c)\mathrm{d}t$ gilt

   $$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \frac{1}{|x - c|} \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\mathrm{d}t \right| \leq \sup\{|f(t) - f(c)| \mid t \in [c; x] \cup [x; c]\}.$$

   Aus der Stetigkeit von f bei c folgt $\lim_{x \to c} \sup\{|f(t) - f(c)| \mid t \in [c; x] \cup [x; c]\} = 0$, also

   $$f(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = F'(c).$$

5. Ist G eine Stammfunktion zu f (also $G : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $G' = f$), dann unterscheidet sich G von der zu f gehörenden Stammfunktion F um eine Konstante.

   Denn nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann;

   $$(6) \qquad (F - G)' = 0 \Rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in [a;b]} (F - G)(x) = k$$

   An jeder Stelle x des Definitionsintervalls ist also $F(x) = G(x) + k$.

3.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Eine Folgerung aus der letzten genannten Eigenschaft der Integralfunktionen zu stetigen Integranden ist der folgende *Hauptsatz*:
Ist f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a; b]$ und G eine Stammfunktion zu f, dann errechnet sich das Integral von f wie folgt:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a).}$$

Denn der Wert k in (6) errechnet sich wegen $0 = F(a) = G(a) + k$ als $-G(a)$.
Daher ist $F(x) = G(x) - G(a)$ und mithin

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = (G(b) - G(a)) - (G(a) - G(a)) = G(b) - G(a).$$

Die nachfolgende Notationskonvention für die Differenz zweier Funktionswerte ist vor allem bei umfangreicheren Funktionstermen zweckmäßig: Liegen die Stellen a und b in der Argumentmenge einer Funktion f, so definiert man

$$[f(x)]_a^b := f(b) - f(a).$$

Anwendungsbeispiele:

1. Eine Stammfunktion der auf dem Intervall $[0;4]$ durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ definierten Funktion f hat den Funktionsterm $\sqrt{2x+1}$, also errechnet man ihr Integral als
$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = [\sqrt{2x+1}]_1^4 = \sqrt{2\cdot 4+1} - \sqrt{2\cdot 0+1} = 2.$$
2. Eine Stammfunktion der Kosinusfunktion ist die Sinusfunktion; bezogen auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ hat man daher
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 - (-1) = 2.$$

4 Integrationsregeln

In einem früheren Abschnitt wurden bereits die Homogenität und die Additivität des Integrals gezeigt: Unter den entsprechenden Voraussetzungen (s. 2.0.1) gilt

$$\int_a^b (k\cdot f)(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad\wedge\quad \int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Das Integral bildet also den Vektorraum der integrierbaren Funktionen mit Argumentmenge $[a;b]$ linear in den Vektorraum der reellen Zahlen ab.
Sind die Integranden stetig, ergeben sich die oben erwähnte Homogenität und Additivität des Integrals auch aus Faktorregel und Summenregel der Differentialrechnung bei Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.
Eine Folgerungen aus der Kettenregel der Differentialrechnung ist(bei entsprechenden Voraussetzungen zu den Integranden):

$$\int_a^b ((g\circ f)\cdot f')(x)\mathrm{d}x = [g(f(x))]_a^b$$

mit z.B. folgenden speziellen Anwendungen

(7) $$\int_a^b \frac{f'}{f}(x)\mathrm{d}x = [\ln(|f(x)|)]_a^b$$

(8) $$\int_a^b (f'\cdot f^n)(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}[f^{n+1}(x))]_a^b$$

(9) $$\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x = 2\cdot[\sqrt{f(x)}]_a^b$$

(10) $$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x = [\arctan(f(x))]_a^b$$

4.1 Integration gerader bzw. ungerader Funktionen auf zu 0 symmetrischen Intervallen

Sind f und g integrierbare Funktionen mit der Argumentmenge $[-b; b] \quad (b > 0)$, und ist f gerade und g ungerade, so gilt

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x \quad \wedge \quad \int_{-b}^{b} g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Für eine Zerlegung Z^* mit Zwischenpunkten, bei der die Zerlegungs- und Zwischenpunkte symmetrisch zu 0 gewählt sind, die also in der Form $(-x_n, -\xi_n, -x_{n-1}, -\xi_{n-1}, \dots, -x_1, 0, x_1, \dots, \xi_{n-1}, x_{n-1}, \xi_n, x_n)$ darstellbar ist, haben die zugehörigen Zwischensumme die Form

$$\begin{aligned}
S(f, Z^*) &= \sum_{i=0}^{n} f(-\xi_i) \cdot (-x_{i-1} - (-x_i)) + f(0) \cdot (x_1 - (-x_1)) + \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + f(0) \cdot (x_1 - (-x_1)) + \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + f(0) \cdot (x_1 - (-x_1)); \\
S(g, Z^*) &= \sum_{i=0}^{n} g(-\xi_i) \cdot (-x_{i-1} - (-x_i)) + g(0) \cdot (x_1 - (-x_1)) + \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} -g(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Durchäuft nun Z^* eine Folge der beschriebenen Art, bei der die Feinheit gegen 0 geht, strebt die erste Folge von Zwischensummen gegen $2 \cdot \int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x + 0$, während die zweite den konstanten Wert 0, also auch den Grenzwert 0 hat.

Anwendungsbeispiele:

1. Die rationale Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2+1}$ ist ungerade; Integration über $[-4711; 4711]$ liefert daher
$$\int_{-4711}^{4711} \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1} \,\mathrm{d}x = 0$$
2. Eingeschränkt auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ist die Kosinusfunktion gerade und die Sinusfunktion ungerade. Daher gilt:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x \quad \wedge \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = 0$$

4.2 Partielle Integration

Sind die auf dem Intervall $[a; b]$ definierten Funktionen f und g stetig differenzierbar, dann sind die Produkte $f \cdot g'$ und $f' \cdot g$ als stetige Funktionen integrierbar, und es gilt

$$\int_{a}^{b} (f \cdot g')(x)\mathrm{d}x = [(f \cdot g)(x)]_a^b - \int_{a}^{b} (f' \cdot g)(x)\mathrm{d}x.$$

Denn nach dem Hauptsatz und der Produktregel der Differentialrechnung ist

$$[(f \cdot g)(x)]_a^b = \int_{a}^{b} (f \cdot g)'(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} (f' \cdot g + f \cdot g')(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} (f' \cdot g)(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} (f \cdot g')(x)\mathrm{d}x.$$

Anwendungsbeispiele:

1. Findet man zur Funktion mit dem Term $x \cdot \cos(x)$ mit der Argumentmenge $[0;\pi]$ auf Anhieb keine Stammfunktion zur Berechnung von $\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\mathrm{d}x$, kann man wie folgt vorgehen:

   Mit $f(x) := x;\ g(x) := \sin(x)$ ist $f'(x) = 1;\ g'(x) = \cos(x)$.

   Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d} = [(f \cdot g)(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (f' \cdot g)(x)\mathrm{d}x$$
$$= [x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 0 - [\cos(x)]_0^\pi = -2.$$

2. Zur Integration der Logarithmusfunktion auf dem Intervall $[1;2]$ kann man $\ln(x)$ als Produkt $f(x) \cdot g'(x)$ auffassen mit $f(x) = \ln(x),\ g(x) = x$.

$$\int_1^2 \ln(x) \cdot 1\mathrm{d}x = [x \cdot \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2 \cdot \ln(2) - \int_1^2 1\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \ln(2) - 1.$$

4.3 Substitutionsregel

Unter den Voraussetzungen

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad \alpha < \beta; \quad \varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{stetig differenzierbar, isoton}$$
$$f : [\varphi(\alpha);\varphi(\beta)] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{stetig differenzierbar}$$

gilt

$$\int_\alpha^\beta ((f' \circ \varphi) \cdot \varphi')(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f'(x)\mathrm{d}x.$$

Denn mit der Kettenregel der Differentialrechnung und zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes erhält man

$$\int_\alpha^\beta ((f' \circ \varphi) \cdot \varphi')(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t = [(f \circ \varphi)(t)]_\alpha \beta = f(\varphi(\beta)) - f(\varphi(\alpha))$$
$$= [f(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f'(x)\mathrm{d}x.$$

Anwendungsbeispiele:

1. Um über $[0; \frac{e^2-1}{2e}]$ das Integral der Funktion mit dem Funktionsterm $\sqrt{1-x^2}$ zu berechnen, betrachtet man mit $\varphi(t) := \sinh(t); \varphi'(t) = \cosh(t)$

$$\int_0^{\frac{e^2-1}{2e}} \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2(t)} \cdot \cosh(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \cosh^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}(e^2 + 4 - e^{-2}) = \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{8e^2}$$

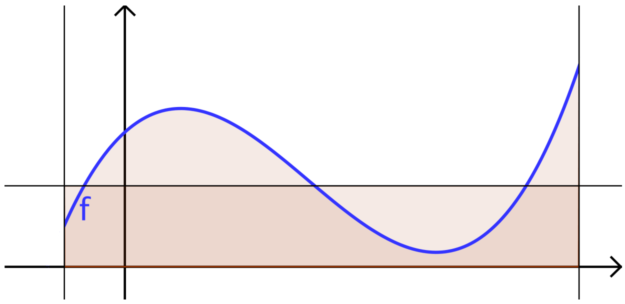
2. Das folgende Resultat $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ überrascht nicht, da es den Flächeninhalt des Viertels vom Einheitskreis angibt.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \sin'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dabei wurde zur Berechnung von $\int \cos^2(t)\mathrm{d}t$ die sich aus dem Additionstheorem der Kosinusfunktion ergebende Formel $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ verwendet. Ein alternativer Weg wäre die Anwendung partieller Integration gewesen.

5 (Erster) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Der Wert $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ wir als *Mittelwert* der Funktion f bezeichnet. Ist speziell f eine stetige Funktion, deren Graph nirgends unterhalb der x-Achse verläuft, gibt der Mittelwert also die Höhe von jenem Rechteck der Grundseite $b-a$ an, das zu der Fläche zwischen x-Achse, Graph von f und den Geraden mit den Gleichungen $x=a, x=b$ inhaltsgleich ist.



Ist f stetig, gibt es - wie unten gezeigt wird - stets eine Stelle $\xi \in [a;b]$, an welcher der Mittelwert als Funktionswert angenommen wird. Diese Aussage ergibt sich auch aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bei Anwendung auf die zu f gehörende Integralfunktion.
Allgemeiner gilt: Ist f eine auf $[a;b]$ stetige Funktion und g eine stetige Funktion mit gleicher Argumentmenge, deren Werte nie negativ (oder nie positiv) sind, dann gibt es im Intervall $[a;b]$ eine Stelle ξ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

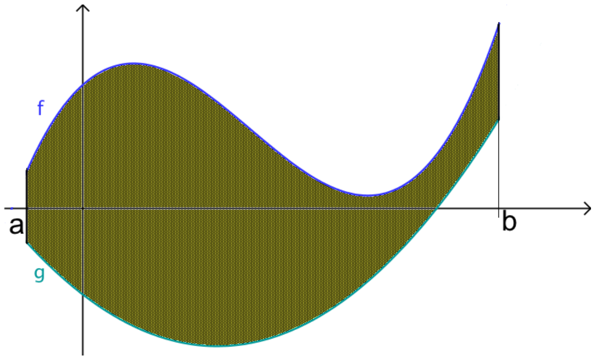
Der Nachweis braucht nur für den Fall geführt zu werden, dass g nicht die Nullfunktion ist, also (als stetige, nirgends negative Funktion) ein positives Integral hat.
Jede auf einem Intervall $[a;b]$ definierte stetige Funktion f ist beschränkt und hat dort sogar Minimum und Maximum. Aufgrund der Isontonie und Homogenität des Integrals kann man schließen:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x\in[a;b]} (\min f) \cdot g(x) \le (f \cdot g)(x) \le (\max f) \cdot g(x) \\ \Rightarrow (\min f) \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x \le (\max f) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \min f \le \frac{\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le \max f \end{aligned}$$

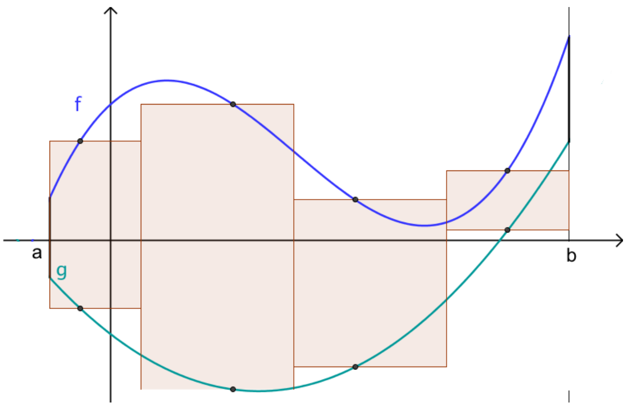
Da nach dem Zwischenwertsatz jedes Element der Menge $[\min f; \max f]$ als Funktionswert von f angenommen wird, gibt es eine Stelle $\xi \in [a;b]$ mit der behaupteten Eigenschaft.

6 Anwendungsbeispiele der Integralrechnung

6.1 Flächeninhalte



Die oben angedeutete Fläche wird von den Graphen der Funktionen f und g sowie den Parallelen zur y-Achse mit den Gleichungen $x = a$ bzw. $x = b$ berandet. Um ihren Inhalt erst näherungsweise und dann - im Falle, dass f und g integrierbar sind - exakt zu bestimmen, wird zunächst eine Zerlegung mit Zwischenpunkten Z^* der Argumentmenge $[a; b]$ betrachtet. Nachfolgend ist ein Beispiel einer Zerlegung in vier Teilintervalle dargestellt.



Bei Zugrundelegung der Zerlegung $Z^* = (x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, x_2, \ldots, \xi_n, x_n)$ erhält man als Näherungswert $A(f, Z^*)$ für den Flächeninhalt

$$A(f, g, Z^*) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Wenn die Funktionen f und g integrierbar sind, strebt eine entsprechende Folge $A(f, g, Z_n^*)$ gegen $\int_a^b (f - g)(x)\ \mathrm{d}x$, wenn $(\sigma(Z_n^*))_n$ eine Nullfolge ist.
Der Inhalt A der eingeschlossenen Fläche (mit $g \leq f$) ist also anzugeben als

$$A = \int_a^b (f - g)(x)\ \mathrm{d}x.$$

6.2 Bogenlängen

Um näherungsweise eine Vorstellung von der Länge des Graphen einer Funktion zu erhalten, kann man den Graphen durch einen einbeschriebenen Polygonzug ersetzen und ehrhält mit dessen (nach Pythagoras zu berechnender) Länge einen Näherungswert. Geht man einer Zerlegung $Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

der Argumentmenge $[a;b]$ der Funktion aus, so führt dies zur Näherung

$$L(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Setzt man zusätzlich voraus, dass die Funktion f bei a und b stetig und im Inneren des Argumentintervalls differenzierbar ist, so sichert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jeden Index i aus $\{1,2,3,\ldots,n\}$ die Existenz eines $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ mit $f(x_i) - f(x_{i-1} = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.
Damit hat man

$$L(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + 1} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Das ist eine Riemannsche Summe für die auf $[a;b]$ durch $g(x) := \sqrt{f'(x)^2+1}$ definierte Funktion g. Wenn die Funktion f z.B. stetig differenzierbar ist, dann strebt diese Riemannsche Summe mit wachsender Verfeinerung gegen das entsprechende Integral. Deutet man dies als Bogenänge $L(f)$ des Graphen, so ergibt sich

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2+1}\, \mathrm{d}x.$$

Anwendungsbeispiele:

1. Um die Bogenlänge des Einheitskreises zu bestimmen, betrachtet man auf dem Intervall $[-1;1]$ die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Der Graph dieser Funktion ist der im ersten und vierten Quadranten des Koordinatensystems liegende Teil des Einheitskreises; seine Länge L errechnet sich wegen $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ als

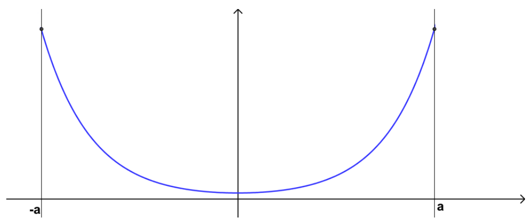
$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} + 1}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $\bigwedge_{t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} \varphi(t) = \sin(t)$ hat man $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -1; \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ und erhält wegen $\varphi' = \cos$ mit der Substitutionsregel

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-\sin^2(t)}} \cdot \cos(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\cos(t)|} \cdot \cos(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, \mathrm{d}t = \pi.$$

Der Umfang des Einheitskreises beträgt also 2π.

2. Der Graph der hyperbolischen Kosinusfunktion wird auch als Kettenlinie bezeichnet, weil sein Verlauf dem einer durchängenden Kette entspricht.

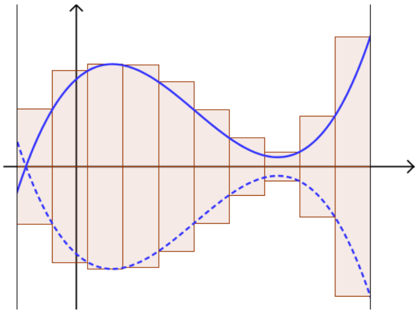


Für die zu bestimmende Länge L ergibt die Betrachtung über einem Intervall $[-a;a]$ wegen $\cosh' = \sin$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{\sinh^2(x)+1}\, \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \cosh(x)\, \mathrm{d}x = [\sinh(x)]_{-a}^{a} = 2\sinh(a).$$

6.3 Rotationsvolumina

Viele der Formen, die beim Drechseln entstehen, haben eine Oberfläche, die sich durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x-Achse erzeugen lässt. Um zunächst näherungsweise und dann exakt das Volumen eines solchen Drehkörpers zu bestimmen, wird der Körper zunächst mit zur x-Achse orthogonalen Schnitten in Scheiben zerlegt, die anschließend durch Zylinder angenähert werden. Man betrachtet also für die auf $[a; b]$ definierten Funktion f eine Zerlegung Z^* des Argumentintervalls mit Zwischenpunkten x_i, wobei man als Zwischenstelle z.B. jeweils das rechte Teilintervallende - oder wie in der Skizze oben die Stelle mit dem maximalen Wert - wählt.



Dann hat die i-te Scheibe den Radius $f(x_i)$ und die Zylindernöhe $(x_i - x_{i-1}$. Als Näherungswert $V(f, Z^*)$ zu einer solchen Zerlegung erhält man daher

$$V(f, Z^*) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Dies ist das π-fache einer Zwischensumme zur Funktion f^2; unter der entsprechenden Integrierbarkeitsvoraussetzung strebt eine Folge solcher Zwischensummen gegen das entsprechende Integral, wenn die Feinheit der Zerlegungen gegen 0 geht. Also hat man

$$V(f) = \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x.$$

Anwendungsbeispiele:

1. Um das Volumen der Einheitskugel zu bestimmen, lässt man die den oberen Einheitshalbkreis beschreibende Funktion f aus dem ersten Anwendungsbeispiel zur Bogenlängenberechnung um die x-Achse rotieren:
$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2\ \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)\ \mathrm{d}x = \pi \cdot [x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi.$$
Das Volumen der Einheitskugel beträgt also $\frac{4}{3}\pi$.

2. Der Kreiskegel dem Grundflächenradius r und der Höhe h kann erzeugt werden, indem man die Strecke durch $O(0; 0)$ und $A(h; r)$ um die x-Achse rotieren lässt. Als Volumen des Kegels erhält man daher
$$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}\ x)^2\ \mathrm{d}x = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \int_0^h x^2\ \mathrm{d}x = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} r^2 \cdot h \cdot \pi.$$