Spiegelung des Raumes an einer Ursprungsgeraden

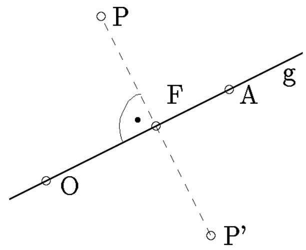
Lö, 2008-01-16

Die Aufgabe

Gegeben ist ein vom Ursprung verschiedener Punkt A sowie eine Gerade g, die durch den Ursprung O und den Punkt A verläuft. Der Ortsvektor von A ist also gleichzeitig Richtungsvektor von g.

Die betrachtete Abbildung des Raumes ist eine Spiegelung an der Geraden g.

<u>Erläuterung</u>: Man erhält den Bildpunkt P' zu einem einem Punkt P, indem man das Lot von P auf die Gerade g fällt. Der Fußpunkt des Lotes wird mit F bezeichnet.. Der Bildpunkt P' ergibt sich dann durch Spiegelung von P an F (oder als Endpunkt der um PF über F hinaus verlängerten Strecke oder als Bild bei einer 180°-Drehung von P um F).



Die zugehörige Abbildung, die dem Ortsvektor $\mathfrak{p}$ von P den Ortsvektor $\mathfrak{p}$' von P' zuordnet, ist eine lineare Abbildung. Die Aufgabe besteht darin, Ihre Matrix M zu bestimmen.

Der Lösungsweg

Da die Strecke PF senkrecht zur Richtung der Geraden g verläuft, hat das Skalarprodukt von $\mathfrak{f} - \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ den Wert 0. Als Punkt auf der Geraden g hat der Lotfußpunkt F für ein bestimmtes r aus $\mathbb{R}$ den Ortsvektor $\mathfrak{f} = r\,\mathfrak{a}$. Für diesen Parameter r gilt dann die Gleichung $\mathfrak{p} + (\mathfrak{f} - \mathfrak{p}) = r\,\mathfrak{a}$; beide Seiten haben ja den Wert $\mathfrak{f}$.

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit $\mathfrak{a}$, so folgt

$$\mathfrak{a} * \mathfrak{p} = r\,\mathfrak{a}*\mathfrak{a}\text{ , also } r = \frac{\mathfrak{a} * \mathfrak{p}}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\ ;$$

die Division durch $\mathfrak{a} * \mathfrak{a}$ ist möglich, da dieser Wert wegen $A \neq O$ verschieden von 0 ist.

Der Ansatz $\mathfrak{p}' = \mathfrak{f} + (\mathfrak{f} - \mathfrak{p}) = 2\mathfrak{f} - \mathfrak{p}$ liefert nun $\mathfrak{p}' = 2\cdot \frac{\mathfrak{a} * \mathfrak{p}}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{p}$.

Nennt man nun die betrachtete Abbildung α und bezeichnet die Einheitsvektoren mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, und die Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit a_1, a_2, a_3, so erhält man:

$$\alpha(\mathfrak{e}_1) = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2\frac{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{2a_1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}2a_1{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a}\\2a_1a_2\\2a_1a_3\end{pmatrix}$$

Entsprechend ergeben sich als Bilder der Einheitsvektoren e_2 und e_3 :

$$\alpha(\mathfrak{e}_2) = \frac{1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}2a_1a_2\\2a_2{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a}\\2a_2a_3\end{pmatrix},\quad \alpha(\mathfrak{e}_2) = \frac{1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}2a_1a_3\\2a_2a_3\\2a_3{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a}\end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis

$$M = \frac{1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}2a_1{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a} & 2a_1a_2 & 2a_1a_3\\2a_1a_2 & 2a_2{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a} & 2a_2a_3\\2a_1a_3 & 2a_2a_3 & 2a_3{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a}\end{pmatrix}.$$

Betrachtet man lediglich die entsprechende Abbildung in der Ebene, dann ist $a_3 = 0$ und man erhält die Matrix $M = \frac{1}{\mathfrak{a} * \mathfrak{a}}\begin{pmatrix}2a_1{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a} & 2a_1a_2\\2a_1a_2 & 2a_2{}^2 - \mathfrak{a} * \mathfrak{a}\end{pmatrix}$.

Wegen $\mathfrak{a} * \mathfrak{a} = a_1{}^2 + a_2{}^2$ lässt sich dieses Ergebnis vektorfrei schreiben als $M = \frac{1}{a_1{}^2 + a_2{}^2}\begin{pmatrix}a_1{}^2 - a_2{}^2 & 2a_1a_2\\2a_1a_2 & a_2{}^2 - a_1{}^2\end{pmatrix}$.