

Exponentialfunktion

Klaus-R. Loeffler

10.2011

1 Die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion \ln , definiert durch

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} \ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

ist als Integralfunktion mit stetigem Integranden differenzierbar. Die Funktion ist streng isoton, da an jeder Stelle x ihre Ableitung die Ableitung $\frac{1}{x}$ positiv ist, hat daher eine ebenfalls differenzierbare Umkehrfunktion g . Nach der entsprechenden Ableitungsregel ist

$$g'(x) = \frac{1}{\ln'(g(x))} = \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = g(x).$$

Die auf ganz \mathbb{R} differenzierbare Funktion g stimmt also mit ihrer Ableitung g' überein; außerdem ist $g(0) = 1$, denn $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.

2 Die Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion

Bei einem ungebremsten Wachstum setzt man voraus, dass in gleichen Zeitintervallen der Zuwachs proportional jeweiligen Anfangsmasse erfolgt. Gibt also die Funktion g die Masse zur Zeit x an, so gilt für jede Zeitspanne h :

$$(1) \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{g(h) - g(0)}{g(0)}$$

Wählt man $g(0)$ als Einheit für die Masse, ergibt sich aus (1)

$$(2) \quad g(x+h) - g(x) = g(x) \cdot (g(h) - g(0))$$

Setzt man nun zusätzlich voraus, dass g an der Stelle 0 differenzierbar ist, so hat der Differenzenquotient von g an der Stelle 0 einen Grenzwert (nämlich $g'(0)$), und es folgt, dass g an jeder Stelle x differenzierbar ist:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(g(x) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \right) = g(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g(x) \cdot g'(0)$$

Setzt man nun noch voraus, dass das Wachstumsgeschwindigkeit so gewählt ist, dass zum Zeitpunkt 0 die Wachstumsgeschwindigkeit 1 beträgt, so hat man folgendes Ergebnis: Die Funktion g ist überall differenzierbar, und es gilt:

$$(4) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} g'(x) = g(x)$$

Die Funktion g stimmt also mit ihrer Ableitung überein.

3 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Für die nachfolgenden Schlüsse wird nicht mehr von der Bedeutung der Funktion (als Umkehrfunktion zu \ln bzw. als Wachstumsfunktion) Gebrauch gemacht, sondern es werden lediglich Folgerungen aus folgenden zugrunde gelegten Eigenschaften der Funktion g gezogen:

(0) Die Funktion g ist auf \mathbb{R} differenzierbar, es gilt $g' = g$ und $g(0) = 1$.

Alleine unter Verwendung von (0) und ohne Rückgriff auf die physikalische Bedeutung von g ergibt sich, dass g die folgenden Eigenschaften hat:

- $\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} g(a+b) = g(a) \cdot g(b)$

Zum Beweis dieser *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* betrachtet man für eine beliebige Konstante c die Hilfsfunktion h , die durch $h(x) = g(c-x) \cdot g(x)$ definiert ist. Nach Ketten- und Produktregel ist h überall an jeder Stelle x differenzierbar:

$$(5) \quad h'(x) = g'(c-x) \cdot (-1) \cdot g(x) + g(c-x) \cdot g'(x) = -g(c-x) \cdot g(x) + g(c-x) \cdot g(x) = 0.$$

Als Funktion mit überall verschwindender Ableitung ist h konstant; zur Ermittlung der Konstanten k , die h an jeder Stelle annimmt, setzt man $x = 0$ ein (, weil man hier den Funktionswert von g kennt).

$$(6) \quad h(x) = k = h(0) = g(c-0) \cdot g(0) = g(c) \cdot g(0) = g(c).$$

Somit hat man

$$(7) \quad \bigwedge_{c,x \in \mathbb{R}} g(c-x) \cdot g(x) = g(c).$$

Mit der Substitution $c = a+b$, $x = b$ ergibt sich aus (7) die zu beweisende Funktionalgleichung. Weiterhin erhält man:

- Für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x gilt: $g(nx) = (g(x))^n$.

Für $n = 0$ ist die Behauptung wegen $g(0x) = g(0) = 1 = g(x)^0$ richtig, und mit der Induktionsvoraussetzung $g(nx) = g(x)^n$ folgt wegen

$$g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) \cdot g(x) = g(x)^n \cdot g(x) = g(x)^{n+1}$$

die behauptete Formel durch vollständige Induktion.

- Für jede reelle Zahl x ist $g(x) \neq 0$ und $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$.

Demn $g(x) \cdot g(-x) = g(x+(-x)) = g(0) = 1$.

- Für jede ganze Zahl p und jede positive ganze Zahl q gilt $(g(\frac{p}{q}))^q = g(1)^p$.

Das ist eine unmittelbare Folgerung aus den beiden vorhergehenden Regeln.

- Für jede reelle Zahl x ist $g(x)$ positiv.

Demn wegen $g(x) = g(\frac{x}{2}) \cdot g(\frac{x}{2}) = (g(\frac{x}{2}))^2$ kann $g(x)$ nicht negativ sein; und wie oben gezeigt wurde, hat g auch keine Nullstellen.

- Der Graph von g verläuft überall oberhalb der x-Achse, steigt streng monoton und ist linksdrehend.

Das folgt wegen $g' = g$ unmittelbar aus der vorhergehenden Feststellung und dem globalen Wachstumssatz.

3 Eigenschaften der Exponentialfunktion

- Wenn eine auf \mathbb{R} differenzierbare Funktion f die Eigenschaften $f' = f$ und $f(0) = 1$ hat, dann gilt $g = f$.

Zum Beweis betrachtet man die Ableitung der durch die Gleichung $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ definierten Hilfsfunktion h :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$$

h ist also konstant und hat überall den Wert $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) = h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$; somit sind die Funktionen f und g identisch. Der Funktionswert $g(1)$ wird *Eulersche Zahl* genannt und mit dem Platzhalter e bezeichnet.

- Für jede positive ganze Zahl n gilt: $0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < \frac{4}{n}$.

Zum Beweis wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf g über den Intervallen $[-\frac{1}{n+1}; 0]$ und $[0; \frac{1}{n}]$ an: Danach gibt es in den Intervallen $[-\frac{1}{n+1}; 0]$ und $[0; \frac{1}{n}]$ Stellen ξ_1 bzw. ξ_2 mit

$$\frac{g(0) - g(-\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} = g(\xi_1) \quad \wedge \quad \frac{g(\frac{1}{n}) - g(0)}{\frac{1}{n}} = g(\xi_2)$$

Wegen $\xi_1 < 0 < \xi_2$ gilt $g(\xi_1) < 1 < g(\xi_2)$ aufgrund der Monotonie von g und wegen $g(0) = 0$, so dass folgt:

$$1 - g(-\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n+1} \quad \wedge \quad g(\frac{1}{n}) - 1 > \frac{1}{n}$$

Algebraische Umformung ergibt daraus

$$g(-\frac{1}{n+1}) > \frac{n}{n+1} \quad \wedge \quad g(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n}$$

und somit

$$g(\frac{1}{n+1}) < \frac{n+1}{n} \quad \wedge \quad g(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n}.$$

Potenzieren mit $n+1$ bzw. mit n führt schließlich zu

$$g(1) < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \quad \wedge \quad g(1) > (1 + \frac{1}{n})^n,$$

also zu

$$(8) \quad (1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

Aus (8) folgt $2 < e < 4$ (durch Einsetzen von $n = 1$) und durch Subtraktion von $(1 + \frac{1}{n})^n$ erhält man:

$$(9) \quad 0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n} < e \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{n}.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Nach dem Einschließungssatz für konvergente Folgen (entspricht dem Einschließungssatz für konvergente Funktionen), folgt aus (9), dass die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ gegen die Eulersche Zahl e konvergiert.

Die angegebene Folge wächst streng monoton, d.h. für jede positive ganze Zahl n gilt die Ungleichung $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^n$.

Der Beweis ergibt sich nach einigen Umformung mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung und ist in der Zusammenstellung zur Bernoullischen Ungleichung als Anwendungsbeispiel angegeben.