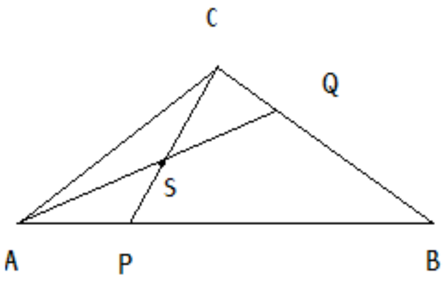
Sonderaufgabe (bearbeitet von Meike Bogdan, Mai 2005):



Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Punkt P liegt auf der Strecke AB und der Punkt Q auf der Strecke BC. Das Teilungsverhältnis $\frac{AP}{AB}$ wird mit μ und das von $\frac{BQ}{BC}$ wird mit ν bezeichnet. Dabei sind μ und ν reelle Zahlen zwischen 0 und 1. Die Strecken AQ und PC schneiden sich im Punkt S. Gesucht ist die allgemeine Berechnung des Teilungsverhältnisses $\frac{AS}{AQ}(=:\kappa)$.

Lösung (für $\vec{a} =$ o)

Als Ortsverktoren der Punkte P und Q erhält man

$\vec{p} = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}) = \mu\vec{b}$ und $\vec{q} = \vec{c} + \nu(\vec{b} - \vec{c})$;

Der Punkt S liegt auf den Strecken AQ und PC. Dadurch lässt sich sein Ortsvektor $\vec{s}$ sowohl in der Form $\vec{a} + t(\vec{q} - \vec{a}) =$ t$\vec{q}$ als auch in der Form $\vec{c} + r(\vec{p} - \vec{c})$ mit Zahlen t, r∈]0; 1[darstellen.

Dabei gibt t das Verhältnis $\frac{AS}{AQ}$ an, also erhält man mit t den gesuchten Wert κ.

Nach dem Gleichsetzen der Parameterdarstellungen für $\vec{s}$ ergibt sich $\vec{c} + r(\vec{p} - \vec{c}) =$ t$\vec{q}$;

Nach Einsetzen der Werte für $\vec{p}$ und $\vec{q}$ in die Gleichung erhält man

$\vec{c} + r(\mu\vec{b} - \vec{c}) = t(\vec{c} + \nu(\vec{b} - \vec{c}))$

$\vec{c} + r\mu\vec{b} - r\vec{c} = t\vec{c} + t\nu\vec{b} - t\nu\vec{c}$

$\vec{c} + r\mu\vec{b} - r\vec{c} - t\vec{c} - t\nu\vec{b} + t\nu\vec{c} = o$

Nach Ausklammern der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erhält man dann (1- r- t+ tν) $\vec{c}$ + ($\mu r - \nu t$) $\vec{b} = \vec{0}$

Da die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten beide den Wert null haben.

Dadurch erhält man 1- r- t+ tν = 0 und $\mu r - \nu t = 0$;

Die zweite Gleichung liefert r $= \frac{\nu}{\mu}t$, woraus sich durch Einsetzen in die erste Gleichung

1- $\frac{\nu}{\mu}t$ - t+ $\nu t = 0$ ergibt; durch Auflösen der Gleichung nach t ergibt sich t$=\frac{1}{\frac{\nu}{\mu}+1-\nu}$.

Ergebnis: $\kappa = \frac{1}{\frac{\nu}{\mu}+1-\nu}$