

# Differenzierbarkeit

Klaus-R. Loeffler

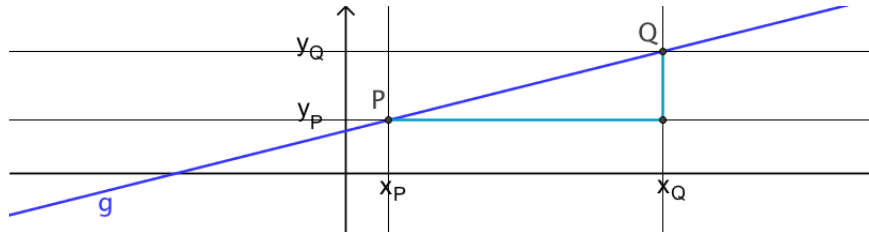
## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hinführung, Definition und unmittelbare Folgerungen</b>	<b>2</b>
1.1	Hinführung . . . . .	2
1.2	Definition der Differenzierbarkeit . . . . .	2
1.3	Folgerungen . . . . .	3
1.3.1	Tangentengleichung . . . . .	3
1.3.2	Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	3
1.3.3	Lokaler Wachstumssatz . . . . .	3
1.3.4	Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Ableitungsregeln</b>	<b>4</b>
2.1	Ableitungsbeispiele . . . . .	4
2.2	Ableitung einer Integralfunktion . . . . .	5
2.3	Faktorregel . . . . .	5
2.4	Summenregel . . . . .	5
2.5	Produktregel . . . . .	6
2.6	Potenzregel . . . . .	6
2.7	Kettenregel . . . . .	6
2.8	Reziprokenregel . . . . .	7
2.9	Quotientenregel . . . . .	7
2.10	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	7
2.11	Tabelle der wichtigsten Ableitungen . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Eigenschaften differenzierbarer Funktionen</b>	<b>8</b>
3.1	Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	8
3.1.1	Mittelwertsatz . . . . .	8
3.1.2	Verallgemeinerter Mittelwertsatz . . . . .	9
3.2	Folgerungen aus dem Mittelwertsatz . . . . .	9
3.2.1	$f' = 0 \Rightarrow f$ ist konstant . . . . .	9
3.2.2	Globaler Wachstumssatz . . . . .	9
3.2.3	Fixpunktsatz für differenzierbare Funktionen . . . . .	10
3.3	Zwischenwertsatz für Ableitungen . . . . .	10

# 1 Hinführung, Definition und unmittelbare Folgerungen

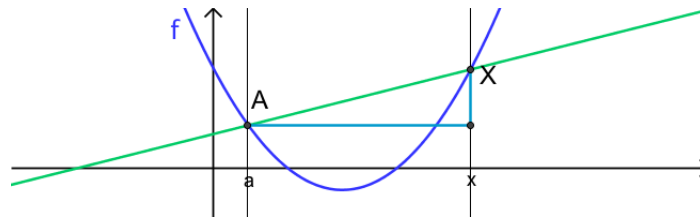
## 1.1 Hinführung

Die Steigung  $m$  einer Geraden  $g$  gibt an, wie steil bzw. flach eine Gerade verläuft und ob sie steigt oder fällt. Bei einer Ursprungsgeraden ist das die zweite Koordinate des Punktes  $P(1|y_P)$  auf der Geraden. Allgemein hat die Gerade  $g$  durch zwei nicht auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse liegenden Punkte  $P$  und  $Q$  die Steigung  $m_g = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ .



Will man bei einem nicht geradelinigen Kurvenverlauf die Steigung beschreiben, so kann man das näherungsweise mithilfe von Sekanten tun: Will man einen Näherungswert für die Steigung des Graphen einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  erhalten, legt man eine Sekante durch den Kurvenpunkt  $A(a|f(a))$  und einen davon verschiedenen Kurvenpunkt  $X(x|f(x))$  und berechnet die Steigung der Strecke  $AX$ .

$$m_{AX} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Allerdings entspricht die so ermittelte Durchschnittssteigung des Graphen von  $f$  über dem Intervall  $[a; x]$  (bzw.  $[x; a]$ , falls  $x$  kleiner als  $a$  ist) anschaulich nur dann näherungsweise der Steigung des Graphen von  $f$  bei  $a$ , wenn  $|x - a|$  klein genug ist. So ergibt sich im skizzierten Beispiel als Steigung von  $AX$  eine positive Zahl, während ganz offensichtlich der Graph von  $f$  durch den Punkt  $A$  nicht steigt, sondern fällt.

Man möchte die Steigung an der Stelle  $a$  zu einer vorgegebenen Fehlerschranke  $\varepsilon$  durch einen Wert beschreiben, der sich auch bei noch größerer Annäherung der Stelle  $a$  durch die Stelle  $x$  von der zugehörigen Durchschnittssteigung um weniger als  $\varepsilon$  unterscheidet.

Diese Forderung erfüllt - falls er existiert - der Grenzwert der Durchschnittssteigungsfunktion  $g_a$  an der Stelle  $a$ :

$$g_a : A_f \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dies führt zu folgender Definition der Differenzierbarkeit:

## 1.2 Definition der Differenzierbarkeit

Eine Funktion  $f$  heißt *differenzierbar* an der Stelle  $c$  ihrer Argumengmenge  $A$ , wenn die durch  $g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  über  $A \setminus \{c\}$  definierte Funktion  $g$  an der Stelle  $c$  einen Grenzwert hat, also formaler:

$$c \in A \subset \mathbb{R}; \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ differenzierbar bei } c : \iff \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lambda$$

Falls dieser Grenzwert  $\lambda$  existiert, wird er als *Ableitung von  $f$  an der Stelle  $c$*  bezeichnet und als  $f'(c)$  notiert. Damit wird auf der Menge aller Stellen von  $A$ , an denen  $f$  differenzierbar ist, eine Funktion  $f'$  definiert.

### 1.3 Folgerungen

#### 1.3.1 Tangentengleichung

Die Gerade mit der Steigung  $m$ , die durch den Punkt  $P$  verläuft, hat bekanntlich die Gleichung  $y = y_P + m \cdot (x - x_P)$ .

Die im Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $(c|f(c))$  an den Graphen von  $f$  angelegte Tangente hat die Steigung  $f'(c)$  und daher die Gleichung  $y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$ .

#### 1.3.2 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(1) Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit

Zu zeigen ist, dass aus  $\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right) = 0$  folgt  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = 0$ . Dies ergibt wegen

$$f(x) - f(c) = \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right) (x - c) + f'(c) \cdot (x - c) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } x \rightarrow c)$$

(2) Aus Stetigkeit folgt nicht Differenzierbarkeit

Dies wird durch Beispiel einer Funktion gezeigt, die an der Stelle 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist:

Durch

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}^*} f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \wedge \quad f(0) = 0$$

wird eine auf ganz  $\mathbb{R}$  stetige Funktion definiert, da das Produkt einer bei 0 gegen 0 konvergenten Funktion mit einer in einer Umgebung von 0 beschränkten Funktion bei 0 den Grenzwert 0 hat. Aber die Durchschnittssteigung über dem Intervall  $[0; x]$ , also  $\sin(\frac{1}{x})$  nimmt in jeder Umgebung von 0 die Werte 0 und 1 an (nämlich bei  $x = \frac{n}{\pi}$  bzw.  $x = \frac{2}{\pi(1+4n)}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ), hat also an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

#### 1.3.3 Lokaler Wachstumssatz

Ist eine Funktion  $f$  mit Argumentmenge  $A$  an einer Stelle  $c \in A$  differenzierbar, und ist die Ableitung dort positiv, so gibt es ein offenes Intervall  $I$  um die Stelle  $c$ , für das folgendes gilt:

$$\bigwedge_{x, y \in I \cap A} (x < c < y \Rightarrow f(x) < f(c) < f(y))$$

Denn nach dem Positivitätssatz für Grenzwerte folgt aus  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ , dass es ein offenes Intervall  $I$  um  $c$  gibt mit

$$\bigwedge_{x \in I \cap A \setminus \{c\}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Für alle  $x \in I \cap A \setminus \{c\}$  sind daher  $f(x) - f(c)$  und  $x - c$  vorzeichengleich. Daher gilt

$$\bigwedge_{x, y \in I \cap A} (x < c \Rightarrow f(x) < f(c)) \quad \wedge \quad (y > c \Rightarrow f(y) > f(c)).$$

## 2 Ableitungsregeln

### 1.3.4 Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum

Eine Funktion  $f$  mit der Argumentmenge  $A$  hat genau dann an einer Stelle  $c \in A$  ein lokales Maximum, wenn es ein offenes Intervall  $I$  um  $c$  gibt, in dem die Funktion an keiner Stelle einen größeren Wert als  $f(c)$  annimmt:

$$f \text{ hat bei } c \text{ ein lokales Maximum} \Leftrightarrow \bigvee_{\delta \in \mathbb{R}_+} \bigwedge_{x \in A} (|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c))$$

Wäre die Ableitung von  $f$  an einer Stelle  $c$  mit einem lokalen Maximum verschieden von 0, so müsste  $c$  ein Randpunkt der Argumentmenge sein, da sonst nach dem lokalen Wachstumssatz in jedem offenen Intervall um  $c$  auch größere Werte als  $f(c)$  angenommen würden. Daher gilt die folgende notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums:

Ist  $c$  innerer Punkt der Argumentmenge  $A$  einer bei  $c$  differenzierbaren Funktion  $f$ , und hat  $f$  bei  $c$  ein lokales Maximum, so gilt  $f'(c) = 0$ .

## 2 Ableitungsregeln

Der Nachweis der Differenzierbarkeit an einer Stelle und die Berechnung der Ableitung  $f'(c)$  verfahren nach folgendem Schema

1. Notieren des Terms  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  für die mittlere Steigung über dem Intervall  $[c; x]$  (bzw.  $[x; c]$ ), des sog. *Differenzenquotienten*. Da der Nenner und (bei Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $c$ ) der Zähler beide bei  $c$  den Grenzwert 0 haben, lässt sich ohne weitere Umformung noch keine Aussage über die Differenzierbarkeit machen.
2. Algebraische Umformung des Differenzenquotienten zu einem oder mehreren Operanden, für die jeweils ein Grenzwert an der Stelle  $c$  zu erkennen ist.

Anstelle des oben angegebenen Differenzenquotienten  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  kann man auch den durch Substitution mit  $x = c+h$  entstehenden Ausdruck  $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$  betrachten. Er hat genau dann bei 0 einen Grenzwert, wenn die Funktion  $f$  bei  $c$  differenzierbar ist, und dieser Grenzwert ist die Ableitung  $f'(c)$ .

### 2.1 Ableitungsbeispiele

- Eine konstante Funktion  $f$  ist an jeder Stelle  $c$  differenzierbar;  $f'(c) = 0$ .

Denn wenn  $k$  die reelle Zahl ist, die von  $f$  an jeder Stelle als Wert angenommen wird, so gilt:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{k - k}{x - c} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

- Die identische Funktion  $f$ , die an jeder Stelle  $x$  den Wert  $x$  annimmt ist an jeder Stelle  $c$  differenzierbar;  $f'(c) = 1$ , denn

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x - c}{x - c} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

- Die Kehrwertfunktion  $f$ , die an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}^*$  den Wert  $\frac{1}{x}$  annimmt, ist an jeder Stelle  $c \in \mathbb{R}^*$  differenzierbar;  $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$ , denn

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \frac{c - x}{xc(x - c)} = \frac{-1}{xc} \rightarrow -\frac{1}{c^2} \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

## 2 Ableitungsregeln

- Die Wurzelfunktion  $f$ , die an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  den Wert  $\sqrt{x}$  annimmt, ist an jeder Stelle  $c \in \mathbb{R}_+$  differenzierbar;  $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ , denn

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \frac{x - c}{(\sqrt{x} + \sqrt{c})(x - c)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{c}} \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

### 2.2 Ableitung einer Integralfunktion

Ist  $f$  eine auf einem Intervall  $[a; b]$  definierte, integrierbare Funktion, dann erklärt man bekanntlich die zugehörige Integralfunktion  $F$  durch

$$F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad \bigwedge_{x \in [a; b]} F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Die Integralfunktion ist zwar überall stetig, aber nicht notwendigerweise differenzierbar.

Ist allerdings der Integrand  $f$  an einer Stelle  $c$  stetig, dann ist  $F$  bei  $c$  differenzierbar und hat dort die Ableitung  $f(c)$ , wie nachfolgend gezeigt wird.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \left| \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt - \int_c^x f(c) dt}{x - c} \right| = \left| \frac{\int_c^x f(t) dt - \int_c^x f(c) dt}{x - c} \right| \\ &= \left| \frac{\int_c^x (f(t) - f(c)) dt}{x - c} \right| \leq \left| \frac{\int_c^x |f(t) - f(c)| dt}{x - c} \right| \leq \frac{|x - c| \cdot \sup\{|f(t) - f(c)| \mid t \in [x; c] \cup [c; x]\}}{|x - c|} \\ &= \sup\{|f(t) - f(c)| \mid t \in [x; c] \cup [c; x]\} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow c. \end{aligned}$$

Beispiel: Der natürliche Logarithmus  $\ln(x)$  einer positiven, reellen Zahl  $x$  kann auf folgende Weise definiert werden

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} \ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dx.$$

Als Integralfunktion mit stetigem Integranden ist  $\ln$  überall differenzierbar;  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

### 2.3 Faktorregel

Ist  $f$  eine an einer Stelle  $c$  differenzierbare Funktion,  $k$  eine reelle Zahl, dann ist  $k \cdot f$  bei  $c$  differenzierbar;  $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$ , denn

$$\frac{(k \cdot f)(x) - (k \cdot f)(c)}{x - c} = \frac{k \cdot f(x) - k \cdot f(c)}{x - c} = k \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rightarrow k \cdot f'(c) \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

### 2.4 Summenregel

Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  bei  $c$  differenzierbar, dann ist auch die Summe  $f + g$  bei  $c$  differenzierbar;  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(c)}{x - c} &= \frac{f(x) + g(x) - (f(c) + g(c))}{x - c} = \frac{f(x) - f(c) + g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \rightarrow f'(c) + g'(c) \quad \text{für } x \rightarrow c. \end{aligned}$$

## 2.5 Produktregel

Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  bei  $c$  differenzierbar, dann ist auch das Produkt  $f \cdot g$  bei  $c$  differenzierbar;  $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(c)}{x - c} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \frac{(f(x) - f(c)) \cdot g(x) + f(c) \cdot (g(x) - g(c))}{x - c} \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(x) + f(c) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \rightarrow f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c) \quad \text{für } x \rightarrow c. \end{aligned}$$

## 2.6 Potenzregel

Aus der Produktregel ergibt sich durch vollständige Induktion: Ist  $n$  eine positive ganze Zahl, und ist die Funktionen  $f$  bei  $c$  differenzierbar, dann ist auch die Funktion  $f^n$  an der Stelle  $c$  differenzierbar;  $(f^n)'(c) = n \cdot f^{n-1}(c) \cdot f'(c)$ .

## 2.7 Kettenregel

Gehört für eine durch Verkettung entstandene Funktion  $g \circ f$  die Stelle  $c$  zum Differenzierbarkeitsbereich von  $f$ , die Stelle  $f(c)$  zum Differenzierbarkeitsbereich von  $g$ , dann ist die Funktion  $g \circ f$  bei  $c$  differenzierbar;  $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$ .

Der Nachweis wird zunächst für den Fall  $f'(c) \neq 0$  geführt; in diesem Fall sind nach dem lokalen Wachstumssatz in einer geeigneten Umgebung von  $c$  alle Funktionswerte  $f(x)$  für  $x \neq c$  verschieden von  $f(c)$ .

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} &= \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} = \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &\rightarrow g'(f(c)) \cdot f'(c) \quad \text{für } x \rightarrow c. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist noch, dass  $g \circ f$  auch im Falle  $f'(c) = 0$  bei  $c$  differenzierbar ist und dort die Ableitung 0 hat.

Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für  $g$  bei  $f(c)$  und für  $f$  bei  $c$  haben die folgenden beiden Funktionen  $\gamma$  und  $\phi$  bei 0 den Grenzwert 0:

$$\gamma(t) := \frac{g(f(c) + t) - g(f(c))}{t} - g'(f(c)); \quad \phi(h) := \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Umformung ergibt

$$g(f(c) + t) = g(f(c)) + (\gamma(t) + g'(f(c))) \cdot t; \quad f(c + h) = f(c) + h \cdot \phi(h)$$

und somit

$$g(f(c + h)) = g(f(c) + h \cdot \phi(h)) = g(f(c)) + (\gamma(h \cdot \phi(h)) + g'(f(c))) \cdot h \cdot \phi(h).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{g(f(c + h)) - g(f(c))}{h} &= \frac{(\gamma(h \cdot \phi(h)) + g'(f(c))) \cdot h \cdot \phi(h)}{h} \\ &= \gamma(h \cdot \phi(h)) + g'(f(c)) \cdot \phi(h) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

### 2.8 Reziprokenregel

Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $c$  differenzierbar, und ist  $f(c) \neq 0$ , dann ist auch  $\frac{1}{f}$  bei  $c$  differenzierbar;  $(\frac{1}{f})'(c) = -\frac{f'(c)}{f^2(c)}$ , denn da  $f$  stetig ist, sind wegen  $f(c) \neq 0$  alle Funktionswerte  $f(x)$  in einer geeigneten Umgebung von  $c$  verschieden von null. Bezeichnet man die Kehrwertfunktion mit  $g$ , so ist  $\frac{1}{f} = g \circ f$ . Nach der Kettenregel ist  $\frac{1}{f}$  also bei  $c$  differenzierbar:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = (g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c) = -\frac{1}{f^2(c)} \cdot f'(c)$$

### 2.9 Quotientenregel

Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  an der Stelle  $c$  differenzierbar, und ist  $g(c) \neq 0$  (und damit  $g(x) \neq 0$  in einer geeigneten Umgebung von  $c$ ), dann ist  $\frac{f}{g} (= f \cdot \frac{1}{g})$  nach der Produktregel bei  $c$  differenzierbar. Man erhält

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(c) = f'(c) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(c) + f(c) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)}{g(c)} + f(c) \cdot \frac{-g'(c)}{g^2(c)} = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$$

### 2.10 Ableitung der Umkehrfunktion

Ist die Funktion  $f$  streng monoton über einem Intervall um  $c$  und differenzierbar bei  $c$  mit  $f'(c) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  differenzierbar bei  $f(c)$ , und es gilt  $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$ .

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(c))}{f(x) - f(c)} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}} \rightarrow \frac{1}{f'(c)} \quad \text{für } x \rightarrow c.$$

Ergänzende Bemerkungen:

- Die Voraussetzung  $f'(c)$  ist nicht bereits durch die strenge Monotonie von  $f$  gesichert, wie z.B. die Potenzfunktion dritten Grades (für  $c = 0$ ) zeigt.
- Da  $f$  bei  $c$  stetig ist, gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ; nach dem lokalen Wachstumssatz sind für  $x$  aus einer geeigneten Umgebung von  $c$  ( $x \neq c$ ) die Funktionswerte  $f(x)$  verschieden von  $f(c)$ . Wenn also  $\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(c))}{f(x) - f(c)}$  an der Stelle  $f(c)$  einen Grenzwert hat, dann folgt daraus die behauptete Differenzierbarkeit bei  $f(c)$ , und der Grenzwert ist die gesuchte Ableitung.
- Setzt man bereits voraus, dass die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  bei  $f(c)$  differenzierbar ist, dann ist die Ableitung mithilfe der Kettenregel und der Ableitung der identischen Funktion einfach zu berechnen:

$$\bigwedge_x (f^{-1} \circ f)(x) = x \implies (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1 \quad \text{und daher} \quad (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

### 2.11 Tabelle der wichtigsten Ableitungen

Funktion	$ f$	$k \cdot f$	$f + g$	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$g \circ f$	$f^{-1}$
Ableitung	$ f'$	$k \cdot f'$	$f' + g'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(g' \circ f) \cdot f'$	$\frac{1}{f'}$

Außerdem gilt für spezielle Funktionen mit

$$p_n(x) := x^n, \quad r(x) = \frac{1}{x}, \quad w(x) := \sqrt{x}; \quad \exp(x) := e^x :$$

Funktion	$ p_n$	$r$	$w$	$\exp$	$\ln$	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\sinh$	$\cosh$
Ableitung	$ n \cdot p_{n-1}$	$-\frac{r'}{r^2}$	$\frac{1}{2 \cdot w}$	$\exp$	$r$	$\cos$	$\sin$	$\frac{1}{\tan^2}$	$\cosh$	$\sinh$

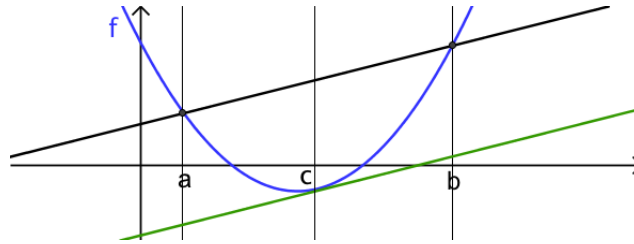
### 3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihrer Argumentmenge differenzierbar ist.

#### 3.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

##### 3.1.1 Mittelwertsatz

Ist  $f$  eine auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige und im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion, dann gibt es im Inneren des Intervalls eine Stelle  $c$ , an der die zugehörige Tangente parallel zur Sekante durch die Punkte  $(a|f(a))$  und  $(b|f(b))$  verläuft.



$$f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig, auf } ]a; b[ \text{ differenzierbar} \implies \exists_{c \in ]a; b[} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Der Beweis wird im Anschluss an eine Reduktion auf einen Spezialfall durchgeführt.

1. Reduktion auf den Spezialfall  $f(a) = f(b) = 0$

Definiert man die Hilfsfunktion  $h$  durch

$$(1) \quad \bigwedge_{x \in [a; b]} h(x) := f(x) - f(a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a),$$

also als Differenz von  $f$  und der linearen Funktion, deren Graph die betrachtete Sekante ist, dann ist  $h$  differenzierbar und hat an den Stellen  $a$  und  $b$  den Wert 0. Gilt also der Mittelwertsatz in der reduzierten Form, dann gibt es im Intervall  $]a; b[$  eine Stelle  $c$  mit  $h'(c) = 0$ ; wegen  $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ergibt sich daraus die allgemeine Behauptung des Mittelwertsatzes.

2. Nachweis der reduzierten Behauptung (Satz von Rolle)

Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall hat  $f$  dort Minimum und Maximum. Werden beide am Rand angenommen ist die Funktion wegen  $f(a) = f(b)$  konstant, hat also (z.B.) an der Stelle  $c = \frac{a+b}{2}$  die Ableitung 0.

Wird aber Minimum oder Maximum an einer Stelle  $c$  aus  $]a; b[$  angenommen, so folgt aus dem lokalen Wachstumssatz, dass  $f'(c) = 0$  gelten muss.

3. Modifikation der Behauptung

Durch Multiplikation der Gleichung in (1) mit  $b - a$  und Addition von  $f(a)$  erhält die Aussage des Mittelwertsatzes die Form  $\exists_{c \in ]a; b[} f(b) = f(a) + f'(c) \cdot (b - a)$ .

Die (anschaulich klare) Folgerung, dass eine Funktion, deren Ableitungsfunktion auf einem Intervall  $I$  den konstanten Wert 0 hat, selber konstant ist, ergibt sich aus dem Mittelwertsatz. Denn an je zwei verschiedenen Stellen  $x, y \in I$  wird der gleiche Funktionswert angenommen, da es nach dem Mittelwertsatz zwischen  $x$  und  $y$  eine Stelle  $\xi$  gibt mit

$$f(y) = f(x) + f'(\xi) \cdot (y - x) = f(x) + 0 \cdot (y - x) = f(x).$$

### 3.1.2 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Während der oben angegebene Mittelwertsatz von der Anschauung her naheliegend ist, bietet sich eine anschauliche Deutung bei seiner Verallgemeinerung nicht so unmittelbar an. Es gilt nämlich allgemeiner:

$$(f, g : ]a; b[ \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig, auf } ]a; b[ \text{ diffb.} \wedge \bigwedge_{x \in ]a; b[} g'(x) \neq 0) \implies \bigvee_{c \in ]a; b[} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Als Spezialfall ergibt sich daraus mit  $\bigwedge_{x \in ]a; b[} g'(x) := x$  der oben angegebene Mittelwertsatz.

Die Verallgemeinerung lässt sich nicht einfach durch zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes (nämlich auf  $f$  und auf  $g$ ) gewinnen, da die für jede der Funktionen im Sinne des Satzes existierende Stelle  $c$  im allgemeinen nicht die gleiche ist.

Zum Nachweis des verallgemeinerten Mittelwertsatzes betrachte man unter den angegebenen Voraussetzungen für  $f$  und  $g$  die Hilfsfunktion  $h$ :

$$\bigwedge_{x \in ]a; b[} h(x) := \begin{vmatrix} g(x) & g(b) & g(a) \\ f(x) & f(b) & f(a) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da  $h$  als Linearkombination von  $f$  und  $g$  differenzierbar im Inneren und stetig am Rand von  $]a; b[$  ist, sind wegen  $h(a) = h(b) = 0$  die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt. Es gibt also im Intervall  $]a; b[$  eine Stelle  $c$  mit

$$h'(c) = 0; \quad \text{also} \quad f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) = 0.$$

Da  $g$  aufgrund der Voraussetzung streng monoton ist, darf durch  $g(b) - g(a)$  dividiert werden, so dass sich die behauptete Gleichung ergibt.

## 3.2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

### 3.2.1 $f' = 0 \implies f$ ist konstant

Gibt es für eine auf  $]a; b[$  differenzierbare und bei  $a, b$  stetige Funktion  $f$  Stellen  $c_1, c_2$ , an den unterschiedliche Funktionswerte angenommen werden, gibt es nach dem Mittelwertsatz auch eine Stelle  $c$  zwischen  $c_1$  und  $c_2$ , an denen die Ableitung verschieden von null ist. Nur eine konstante Funktion hat also als Ableitung die Nullfunktion.

### 3.2.2 Globaler Wachstumssatz

Hat eine auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige, im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion an allen Stellen aus  $]a; b[$  eine positive Ableitung, dann ist sie streng isoton.

Zum Nachweis ist zu zeigen:

$$\bigwedge_{x, y \in [a; b]} (x < y \implies f(x) < f(y))$$

Aus  $a \leq x < y \leq b$  folgt nach dem Mittelwertsatz die Existenz einer Stelle  $c \in ]x; y[$  mit

$$f(y) = f(x) + f'(c)(y - x) > f(x).$$

### 3.2.3 Fixpunktsatz für differenzierbare Funktionen

Ist  $f$  eine stetige, auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  definierte Funktion, deren Funktionswerte alle in  $[a; b]$  liegen, dann hat  $f$  nach dem entsprechenden Satz über stetige Funktionen (mindestens) einen Fixpunkt. Setzt man zusätzlich voraus, dass  $f$  differenzierbar ist, und eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 \leq q < 1$  existiert, durch welche die Ableitung an allen Stellen betragsmäßig nach oben beschränkt ist, so gilt zusätzlich zur reinen Existenzaussage über einen Fixpunkt:

- (1) Die Funktion  $f$  hat genau einen Fixpunkt  $c$ .
- (2) Definiert man eine Folge  $(a_n)$  durch

$$a_0 := a \quad \wedge \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} := f(a_n),$$

dann konvergiert die Folge  $(a_n)$  gegen den Fixpunkt  $c$ .

Zu (1): Es muss nur noch gezeigt werden, dass nicht zwei verschiedene Fixpunkte  $c$  und  $d$  existieren können. Aus der Annahme, dass  $c$  und  $d$  ( $c, d \in [a; b]; c \neq d$ ) Fixpunkte sind, folgt nach dem Mittelwertsatz, dass im Intervall mit den Rändern  $c$  und  $d$  eine Stelle  $\xi$  existiert mit

$$|d - c| = |f(d) - f(c)| = |f'(\xi)| \cdot |d - c| \leq q \cdot |d - c| < |d - c|,$$

woraus durch Widerspruch die Eindeutigkeit des Fixpunkts folgt.

Zu (2): Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $a_n \neq c$  eine Stelle  $\xi$  im Intervall zwischen  $a_{n+1}$  und  $c$ , für die folgendes gilt:

$$(|a_{n+1} - c| = |f(a_n) - f(c)| = |f'(\xi)| \cdot |a_n - c| \leq q \cdot |a_n - c|)$$

Die so erhaltene Ungleichung  $|a_{n+1} - c| \leq q \cdot |a_n - c|$  gilt wegen  $f(c) = c$  auch für den Fall  $a_n = c$ . Durch vollständige Induktion zeigt man

$$|a_0 - c| \leq |a - c| \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_{n+1} - c| \leq q \cdot |a_n - c| \implies \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n - c| \leq q^n \cdot |a - c|.$$

Da  $(q^n)$  wegen  $|q| < 1$  eine Nullfolge ist, ist nach dem Majorantensatz auch  $(a_n - c)$  eine Nullfolge, was äquivalent zu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  ist.

Bemerkung: Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt aus (2) noch einmal die in (1) bewiesene Eindeutigkeit des Fixpunktes.

### 3.3 Zwischenwertsatz für Ableitungen

Ist eine Funktion  $f$  auf einem Intervall  $[a; b]$  differenzierbar mit  $f'(a) < f'(b)$ , und ist  $\lambda$  eine reelle Zahl aus dem offenen Intervall  $]f'(a); f'(b)[$ , dann gibt es in  $]a; b[$  eine Stelle  $\xi$  mit  $f'(\xi) = \lambda$ .

#### 1. Reduktion

Es genügt, den Beweis für den Spezialfall  $\lambda = 0$  zu führen, denn für die durch

$$\bigwedge_{x \in [a; b]} g(x) := f(x) - \lambda x$$

definierte Funktion  $g$  folgt dann wegen  $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 \wedge g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$  die Existenz einer Stelle  $\xi \in ]a; b[$  mit  $g'(\xi) = 0$ , also  $f'(\xi) = \lambda$ .

### 3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

#### 2. Beweis der auf den Spezialfall $\lambda = 0$ reduzierten Behauptung

Nach dem Satz vom Maximum und Minimum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gibt es eine Stelle  $\xi \in [a; b]$ , an der  $f$  ein Minimum annimmt. Dabei kann  $\xi$  keiner der Werte  $a$  oder  $b$  sein, da nach dem lokalen Wachstumssatz  $f$  wegen  $f'(a) < 0$  rechts von  $a$  kleinere Werte als  $f(a)$  annimmt; analog folgt  $\xi \neq b$ .

Mithin liegt  $\xi$  im offenen Intervall  $]a; b[$ ; aufgrund der notwendigen Bedingung für Extrema an inneren Punkten der Argumentmenge gilt also  $f'(\xi) = 0$ .

#### 3. Abgrenzung zum Zwischenwertsatz für stetige Funktionen durch ein Gegenbeispiel

- Da sich jede auf einem Intervall  $[a; b]$  definierte stetige Funktion  $f$  als Ableitung der durch

$$\bigwedge_{x \in [a; b]} F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

definierten Integralfunktion  $F$  erhalten lässt, ist damit auch ein (weiterer) Beweis des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen gegeben.

- Umgekehrt braucht aber die Ableitung einer differenzierbaren Funktion keineswegs stetig zu sein, wie das Beispiel der folgenden auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$  zeigt:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}^*} f(x) := x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad f(0) := 0$$

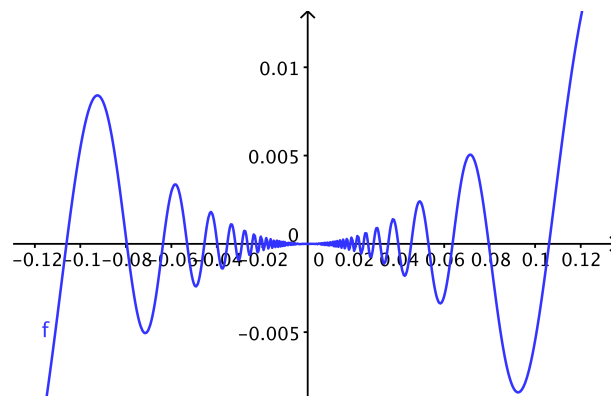
Die Funktion ist bei 0 differenzierbar mit Ableitung 0, denn

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

Für jede von 0 verschiedene Stelle  $x$  liefern die Ableitungsregeln

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

An der Stelle 0 hat  $f'(0)$  nicht den Grenzwert 0 (und auch keinen anderen Grenzwert), denn  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , wohingegen es zu  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  in jedem Intervall um 0 Stellen gibt, an denen der Wert 1 angenommen wird; man betrachte dazu die Stelle  $x = \frac{1}{2n\pi}; n \in \mathbb{N}^*$ .



#### 4. Folgerung zur Art der möglichen Unstetigkeit bei Ableitungen

Die einzige mögliche Art der Unstetigkeit ist oszillatorisch, da sowohl eine Sprungstelle wie auch ein uneigentlicher Grenzwert  $\infty$  durch den oben angegebenen Zwischenwertsatz für Ableitungen ausgeschlossen werden.

(Letzte Bearbeitung 2011-11-02)