Gymnasium Leichlingen

Abi 2009 - 13m_3

Zusammenfassung der Stunde am Donnerstag, 2008-12-04

0. Das Grundproblem

Gegeben ist eine lineare Abbildung f durch ihre Matrix M sowie ein Punkt D mit dem Ortsvektor $\mathfrak{d}$. Es soll entschieden werden, unter welchen Bedingungen es genau einen Vektor $\mathfrak{x}$ gibt, dessen Bildvektor $\mathfrak{d}$ ist, so dass also $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{d}$ gilt.

Um die Frage nicht nur für eine spezielle Matrix M zu beantworten, wird von einer allgemeinen Matrix ausgegangen:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\mathfrak{x} = (x_1|x_2|x_3)^T$ und $\mathfrak{d} = (d_1|d_2|d_3)^T$ ist die Gleichung $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{d}$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \text{ – oder ausgeführt: } \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweise gelesen ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \ . \end{aligned}$$

Genau dann hat also der Punkt D bei der linearen Abbildung f ein eindeutig bestimmtes Urbild, wenn das zuletzt angegebene Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

1. Die geometrische Deutung des Gleichungssystems

Falls nicht alle drei Koeffizienten a_1, b_1, c_1 den Wert 0 haben, ist $a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 = d_1$ die Gleichung einer Ebene mit dem Normalenvektor $(a_1 \mid b_1 \mid c_1)^T$. Diese Ebene wird nachfolgend mit $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet. Entsprechend lassen sich die beiden anderen Gleichungen als Koordinatengleichungen von Ebenen $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ deuten.

Genau dann gibt es also ein eindeutiges Urbild von $\mathfrak{d}$, wenn das Gleichungssystem eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}$ hat, wenn es also genau einen Punkt gibt, der zu allen drei Ebenen gehört.

2. Die Bedingung für genau einen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen

Zunächst werden die beiden Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ betrachtet. Wenn Sie nicht parallel sind, schneiden sie sich in einer Geraden. Sie sind genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ linear abhängig sind.

Wenn $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ linear unabhängig sind, gibt es als eine Schnittgerade. Da diese in beiden Ebenen liegt, muss ihre Richtung orthogonal zu den Normalenvektoren beider Ebenen sein; ein Richtungsvektor der Schnittgeraden ist also das Kreuzprodukt der Normalenvektoren $\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$.

Die Schnittgerade von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ schneidet genau dann die dritte Ebene $\mathfrak{E}_3$, wenn sie nicht parallel zu $\mathfrak{E}_3$ verläuft, wenn also ihr Richtungsvektor nicht orthogonal zum Normalenvektor von $\mathfrak{E}_3$ ist. Das bedeutet: Genau dann schneiden sich die drei Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ in einem Punkt, wenn gilt: $(\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2) * \mathfrak{n}_3 \neq 0$.

3. Das Ergebnis

Genau dann hat bei der oben angegebenen linearen Abbildung f der Vektor $\mathfrak{d}$ genau einen Urbildvektor $\mathfrak{x}$, wenn das Spatprodukt $[(\mathfrak{n}_1 \quad \mathfrak{n}_2 \quad \mathfrak{n}_3]$ verschieden von 0 ist.
Wegen $\mathfrak{n}_i = (a_i \mid b_i \mid c_i)^T$ $(i = 1, 2, 3)$ ergibt sich damit gemäß der Definition des Spatprodukts:

Zur Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ und zum Vektor $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ gibt es genau einen

Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, wenn der Wert des

Spatprodukts $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (auch Determinante genannt) verschieden von 0 ist.

Dabei wurde verwendet, dass $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ gilt, dass man also

durch Vertauschen von Zeilen und Spalten einer Matrix (sogenanntes "Kippen")
den Wert der Determinante nicht verändert.

4. Die Cramersche Regel

Für den Fall, dass das in 0. angegebene Gleichungssystem genau eine Lösung hat (und nur in diesem Fall) lässt sich der Lösungsvektor mit Hilfe der sog. „Cramerschen Regel" bestimmen. Die Herleitung dieser Regel wird an dieser Stelle nicht angegeben.
Zunächst wird das vorgelegte lineare Gleichungssystem durch Einführung der drei Vektoren $\mathfrak{a} = (a_1|a_2|a_3)^T$, $\mathfrak{b} = (b_1|b_2|b_3)^T$, $\mathfrak{c} = (c_1|c_2|c_3)^T$ auf die Form $x_1\,\mathfrak{a} + x_2\,\mathfrak{b} + x_3\,\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ gebracht.
Die Regel besagt nun: Wenn das Gleichungssystem genau eine Lösung hat (wenn also die aus den Koeffizienten gebildete Determinante einen von 0 verschiedenen Wert hat), dann gibt es genau einen Lösungsvektor $\mathfrak{x} = (x_1|x_2|x_3)^T$; er hat die folgenden Komponenten:

$$x_1 = [\mathfrak{d} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}] / [\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}], \quad x_2 = [\mathfrak{a} \quad \mathfrak{d} \quad \mathfrak{c}] / [\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}], \quad x_3 = [\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{d}] / [\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}] .$$

Merkregel für die Formeln: Im Nenner steht immer das Spatprodukt $[\mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}]$, im Zähler steht fast das gleiche Spatprodukt; dort ist lediglich jeweils der Vektor, zu dem die gesuchte Variable gehört, durch den Vektor $\mathfrak{d}$ ersetzt.