# Der Approximationssatz der linearen Algebra

Klaus-R. Loeffler

## 1 Approximationssatz

Voraussetzung

$V$ sei ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $*$ .

$||...||$ sei die durch das Sklarprodukt induzierte Norm auf $V$ ($||\vec{a}|| := \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$ ).

$U$ sei ein Unterraum von $V$ mit der Orthonormalbasis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k)$.

$\vec{x}$ sei ein Vektor aus $V$, mit $r_i$ werde das Produkt $\vec{x} * \vec{b}_i$ bezeichnet ( $i = 1, 2, 3, ..., k$) .

$\vec{y} := \sum_{i=1}^{k} r_i \vec{b}_i$ .

Behauptung

1. $\vec{x} - \vec{y}$ ist orthogonal zu $U$ .
2. $\vec{y}$ approximiert $\vec{x}$ in dem Sinn optimal, dass für jeden von $\vec{x}$ verschiedenen Vektor $\vec{z}$ aus $U$ gilt: $||\vec{x} - \vec{y}|| < ||\vec{x} - \vec{z}||$ .

Beweis

Für einen beliebigen Vektor $\vec{d}$ aus $U$ seien die Koordinaten bezüglich der Orthonormalbasis $B$ mit $s_1, s_2, s_3, ..., s_k$ bezeichnet. Dann gilt:

$$||\vec{x} - \vec{d}||^2 = ||\vec{x} - \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{b}_i||^2 = \vec{x} * \vec{x} - 2\vec{x} * \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{b}_i * \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{b}_i$$

Da das Produkt $\vec{b}_i * \vec{b}_j$ für $i \neq j$ verschwindet und für $i = j$ den Wert 1 hat, ergibt sich:

$$||\vec{x} - \vec{d}||^2 = \vec{x} * \vec{x} - 2 \sum_{i=1}^{k} \vec{x} * s_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^{k} s_i^2 = \vec{x} * \vec{x} + \sum_{i=1}^{k} (s_i^2 - 2 s_i \vec{x} * \vec{b}_i)$$

Mit quadratischer Ergänzung formt man um zu

$$||\vec{x} - \vec{d}||^2 = \vec{x} * \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (s_i^2 - 2 s_i \vec{x} * \vec{b}_i + (\vec{x} * \vec{b}_i)^2)$$

und erhält damit

$$||\vec{x} - \vec{d}||^2 = \vec{x} * \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (s_i - \vec{x} * \vec{b}_i)^2$$

Die Summanden im Ausdruck $\sum_{i=1}^{k}(s_i - \vec{x} * \vec{b}_i)^2$ sind alle nicht-negativ; der Ausdruck nimmt also seinen minimalen Wert 0 genau dann an, wenn alle Summanden verschwinden, wenn also für alle Indizes $i$ gilt $s_i = \vec{x} * \vec{b}_i$. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Als Nebenresultat erhält man wegen $\vec{x}*\vec{x} - \sum_{i=1}^{k}(\vec{x}*\vec{b}_i)^2 = ||\vec{x} - \sum_{i=1}^{k}(\vec{x}*\vec{b}_i)\vec{b}_i||^2 \geq 0$ die folgende *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^{k}(\vec{x} * \vec{b}_i)^2 \leq \vec{x} * \vec{x}$$

Zum Nachweis des ersten Teils der Behauptung wird gezeigt, dass $\vec{x} - \sum_{i=1}^{k}(\vec{x} * \vec{b}_i)\vec{b}_i$ orthogonal zu allen Elementen der Basis von $U$ ist. Für jedes $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ gilt:

$$\left(\vec{x} - \sum_{i=1}^{k}(\vec{x} * \vec{b}_i)b_i\right) * b_j = \vec{x} * \vec{b}_j - \sum_{i=1}^{k}(\vec{x} * \vec{b}_i)\vec{b}_i * \vec{b}_j = \vec{x} * \vec{b}_j - \vec{x} * \vec{b}_j = 0$$

Damit ist der Beweis des Approximationssatzes abgeschlossen.

# 2 Anwendungsbeispiele für den Approximationssatz

1. Bestimmung des Fußpunkts, den das im Raum von einem Punkt $P$ auf eine Ursprungsgerade $g$ gefällte Lot hat.

   Hierbei wählt man $\vec{x}$ als Ortsvektor des Punktes $P$ und den Unterraum $U$ als lineare Hülle eines Richtungsvektors von $g$. Der approximierende Vektor ist dann der Ortsvektor des gesuchten Fußpunkts.

2. Bestimmung des Fußpunkts, den das im Raum von einem Punkt $P$ auf eine Ursprungsebene $e$ gefällte Lot hat.

   Man wählt man $\vec{x}$ als Ortsvektor des Punktes $P$ und den Unterraum $U$ als lineare Hülle zweier linear unabhängiger Richtungsvektoren von $e$. Der approximierende Vektor ist dann der Ortsvektor des gesuchten Fußpunkts.

3. Lineare Regression

   Wenn hierbei $\{(x_i; y_i) \mid i = 1, 2, 3, ..., n\}$ die vorgelegte Messreihe ist, setzt man

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U =< \vec{x}, \vec{e} >, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad V = \mathbf{R}^n$$

   Da die Koeffizienten $m$ und $b$ gesucht werden, für welche $\sum_{i=1}^{n}(mx_i + b - y_i)^2$ minimal wird, ist der Ausdruck $||m\vec{x} + b\vec{e} - \vec{y}||$ zu minimieren, also $\vec{y}$ aus dem Unterraum $< \vec{x}, \vec{e} >$ heraus zu approximieren.

4. Regression höheren Grades, also z.B. quadratische Regression.

   Die Rechnung erfolgt analog zum vorhergehenden Beispiel, nur dass der Unterraum $U$ hier nicht die Dimension 2, sondern $k$ hat (bei Regression $k$-ten Grades).

Als den Unterraum $U$ aufspannende Vektoren kommen zu $\vec{x}$ und $\vec{e}$ noch die $k-1$ Vektoren $\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \\ \vdots \\ x_n^3 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$ hinzu.

5. Approximation einer stetigen Funktion aus einem Unterraum stetiger Funktionen heraus.

   Hierzu ist an anderer Stelle (s. Verzeichnis der Themen) ein eigenes Beispiel gegeben.