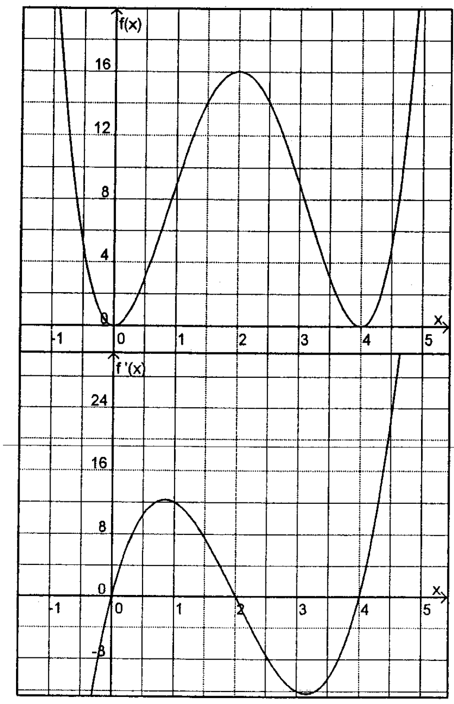
Abi 2011 - 11m1-R **Aufgaben/Lösungen der Klausur Nr. 4** 2009-06-04

Aufgabe 1

Die folgenden Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f',



a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

<u>Lösung</u>: _Wegen $f(x) = x^2 (x-4)^2$ und $f(0) = 0$ ergibt sich

$S_y = (0 \mid 0)$, $S_{x1} = (0 \mid 0)$, $S_{x2} = (4 \mid 0)$.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in $T_1(0 \mid 0)$ und $T_2(4 \mid 10)$ Tiefpunkte und in $H(2 \mid 16)$ einen Hochpunkt hat.

<u>Lösung</u>: $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x \quad = 4x\,(x^2 - 6x + 8)$

$= 4x\,(x - 2)(x-4)$

Die notwendige Bedingung für Extrema ist für $x = 0$, $x = 2$ und $x = 4$ erfüllt.

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 32$; $f''(0) = 32 > 0$, $f''(2) = -16 < 0$, $f''(4) = 32 > 0$.

Bei 0 und 4 liegen also Tiefpunkte vor, bei 2 liegt ein Hochpunkt vor.

Obige Angaben sind also wegen $f(0) = 0$, $f(2) = 16$ $f(4) = 0$ richtig.

c) Leiten Sie aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f' eine Aussage über die Anzahl der Wendestellen von f her und lesen Sie diese Stellen näherungsweise am Graphen ab.

<u>Lösung</u>: Der Graph von f' wechselt an zwei Stellen das Monotonieverhalten, also ändert sich an zwei Stellen das Krümmungsverhalten des Graphen von f.

Die gesuchten Wendestellen sind näherungsweise 0,8 und 3,2 .

d) Betrachten Sie nun die Funktionen g_a mit $g_a(x) = x^2 (x^2 - 8x + a)$. Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung.

d_1) Bestimmen Sie die Zahl a so, dass die Funktion g, mit der Funktion f übereinstimmt.

<u>Lösung</u>: Wegen $g(x) = x^2 (x^2 - 8x + 16)$ liest man sofort ab: $a = 16$.

d_2) Ermitteln Sie a so, dass $x = 0$ eine Wendestelle des Graphen von g ist.

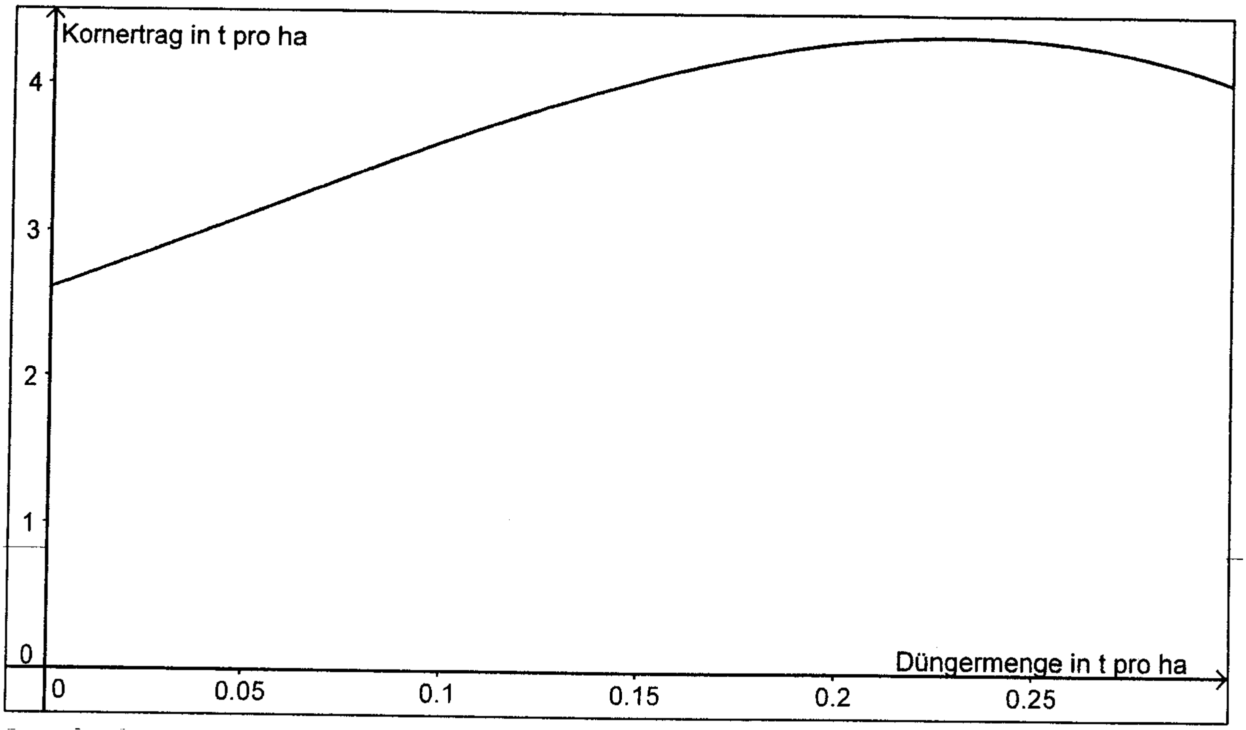
<u>Lösung</u>: $f(x) = x^4 - 8x^3 + ax^2$, $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 2ax$, $f''(x) = 12x^2 - 48x + 2a$, also $f''(0) = 2a$.

Wenn 0 eine Wendestelle ist, muss notwendigerweise $a = 0$ sein.

Dann ist $f''(x) = 12x^2 - 48x$ mit einem Vorzeichenwechsel bei 0, also ist 0 eine Wendestelle.

Aufgabe 2

Wird Raps mit Stickstoff gedüngt, so nimmt der Kornertrag zunächst mit steigender Düngermenge zu. Wird die optimale Düngermenge überschritten, so wird der Ertrag wieder geringer. In dem folgenden Diagramm ist näherungsweise das Ergebnis von Versuchen dargestellt, die dazu in den Jahren 1998 bis 2005 in Hessen durchgeführt wurden.



Der abgebildete Graph gehört zur Funktion k mit $k(x)= - 320/3\ x^3 +16x^2 + 48/5\ x + 13/5$

Dabei bezeichnet x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und k(x) den Kornertrag in Tonnen pro Hektar bei der Düngermenge x. Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die folgenden Fragestellungen zu bearbeiten.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass bei einer Düngermenge von annähernd 0,23 Tonnen pro Hektar der maximale Kornertrag erzielt wird.

Berechnen Sie näherungsweise den maximalen Kornertrag pro Hektar.

Lösung: $k'(x) = -320\ x^2 + 32x + 9{,}6$, also $k'(x) = -320\ (x^2 - 0{,}1x - 0{,}03)$

Die Diskriminante der Gleichung $k'(x) = 0$ ist $0{,}05^2 + 0{,}03 = 0{,}0325$.

Der Graph von k‘ ist eine nach unten geöffnete Parabel, hat also an der zweiten Nullstelle einen plus-minus-Vorzeichenwechsel. Diese Stelle ist $0{,}05 + \sqrt{0{,}0325} = 0{,}230277 ... \approx 0{,}23$.

Damit ist die erste Behauptung der Aufgabe gezeigt.

$k(0{,}23) = 4{,}35658...$; der maximale Kornertrag beträgt also ca. 4,36 Tonnen.

b) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion k und die Steigung an der Wendestelle.

Interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

Lösung: $k''(x) = -640\ x + 32 = - 640\ (x - 0{,}05)$.

Da die lineare Funktion k“ bei 0,05 einen Vorzeichenwechsel hat, ist dies die Wendestelle der Funktion k.

k‘(0,05) = -320 $(0{,}05^2 - 0{,}1 \cdot 0{,}05 - 0{,}03)$ = -320 (0,0025 - 0,005 - 0,03) = 10,4; die Steigung an der Wendestelle beträgt also 10,4 .

Die maximale Zuwachsrate des Kornertrags bei Erhöhung der Düngemenge liegt bei einer Menge von 0,05 Tonnen Dünger pro Hektor vor.

Diese Zuwachsrate beträgt 10,4 (t Raps)/(t Dünger).

c) Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion k auch außerhalb des in der Abbildung dargestellten Bereiches immer eine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs von Düngermenge und Kornertrag liefert.

Lösung: Für negative Düngermengen, also $x < 0$ ist die Zuordnung sicher nicht sinnvoll.

d) Em Landwirt erzielt pro Tonne Raps einen Verkaufspreis von 225 €, die Kosten pro Tonne Stickstoffdünger betragen 500 €.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion g, die den Gewinn pro Hektar in Abhängigkeit von der aufgebrachten Düngemenge pro Hektar beschreibt.

Weitere Betriebskosten sollen dabei unberücksichtigt bleiben.

Lösung: g(x) = k(x) · 225€ - x · 500€ .

Aufgabe 3

Die Punkte A (0 | 4), B (0 | - 4) und C (6 | - 4) sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC und den Punkt M(3 | 0) in ein Koordinatensystem.

Begründen Sie, dass M der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC ist.

Zeichnen Sie den Umkreis und bestimmen Sie eine Gleichung von k.

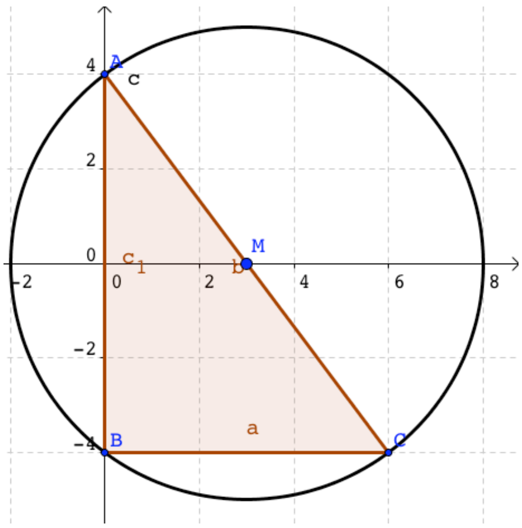
Lösung:

M wird anhand der Koordinaten als Mittelpunkt der Strecke AC erkannt, der Kreis um M ist also der Thaleskreis über AC und geht - da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, auch durch B.

Alternative: |MA| = |MB| = |MC| = 5.

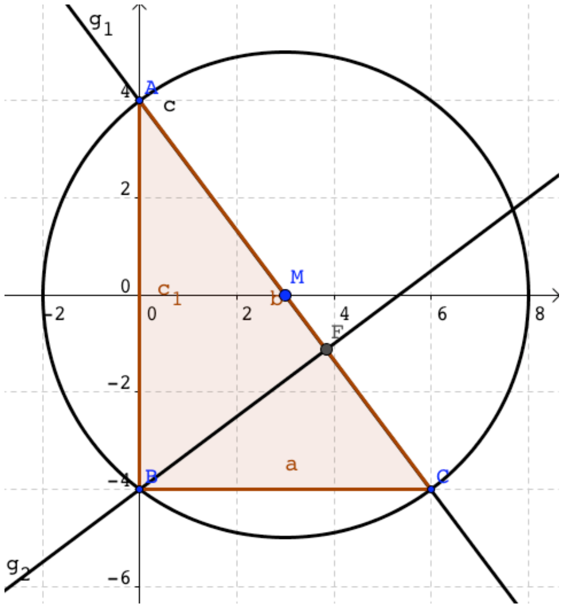
Der Kreis hat die Gleichung

$$(x - 3)^2 + y^2 = 25 .$$



b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte A und C.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt F der Geraden g_1 mit ihrer Orthogonalen g_2, die durch B verläuft.



<u>Lösung</u>: g_1 hat die Steigung - 4/3 x, also die Gleichung y = - 4/3 x + 4; die dazu orthogonale Gerade hat die Steigung 3/4, da sie durch B gezogen wird, hat sie die Gleichung y = 3/4 x - 4 .

Zur Berechnung der Schnittstelle setzt man gleich:

- 3/4 x + 4 = 4/3 x - 4, also 25/12 x = 8.

Somit ist

$x_F = 96/25 = 3{,}84$; $y_F = 0{,}75 \cdot 3{,}84 - 4 = -1{,}12$

Der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist F(3,84 | - 1,12).

c) Der Punkt D entsteht durch Spiegelung von B an der Geraden g_1.

Konstruieren Sie in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe a) diesen Punkt D und begründen Sie, dass D auf dem Kreis k liegt.

Beschreiben Sie kurz, wie man die Koordinaten von D berechnen kann.

Die konkrete Durchführung der Rechnung ist hier nicht erforderlich.

<u>Lösung</u>: Die Zeichnung befindet sich bei der Lösung zu Aufgabenteil b.

Die Gerade durch M ist eine Zentrale des Kreises, also eine Symmetrieachse des Kreises, bei der Kreispunkte durch Spiegelung wieder in Punkte des Kreises übergehen.

Zur Berechnung der Koordinaten von D setzt man den Term der Geradengleichung, also den Ausdruck 3/4 x - 4 für y in die unter a angegebene Kreisgleichung ein, löst also die quadratische Gleichung $\quad (x - 3)^2 + (3/4\, x - 4)^2 = 25$.