

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um die Kurve mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 1$.

- 1a) Eine Nullstelle von f ist 1. Bestimme die Menge O_f aller Nullstellen von f , die Ableitung $f'(x)$ und die Menge $O_{f'}$ der Nullstellen von f' .

Lösung: Polynomdivision ergibt $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 1)$. Die Nullstellen des zweiten Faktors sind wegen $D = 5,25$ die Zahlen $2,5 - \sqrt{5,25}$ und $2,5 + \sqrt{5,25}$ also ca. 0,21 und 4,79.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6 = 3(x^2 - 4x + 2)$ mit den Nullstellen $2 - \sqrt{2}$ und $2 + \sqrt{2}$, also näherungsweise 0,59 und 3,41.

Ergebnisse: $O_f = \{2,5 - \sqrt{5,25}; 2,5 + \sqrt{5,25}\} \approx \{0,21; 1; 4,79\}$,

$O_{f'} = \{2 - \sqrt{2} \text{ und } 2 + \sqrt{2}\} \approx \{0,59; 3,41\}$

- 1b) Fertige eine Vorzeichen-tabelle für f und für f' an und begründe, warum der Graph von f einen relativen Tiefpunkt T hat. Gib die Koordinaten von T an.

Lösung: Nur an den Nullstellen ist ein Vorzeichenwechsel möglich.

x	0,21	0,59	1	3,41	4,79
f(x)	< 0	> 0		< 0	> 0
f'(x)	> 0		< 0		> 0

Die erste Ableitung gibt die Steigung an; der Graph geht an der Stelle 3,41 vom Fallen ins Steigen über, also liegt dort ein relativer Tiefpunkt. Wegen $f(3,41) \approx -10,66$ ergibt sich:

Ergebnis: Der Tiefpunkt T hat die Koordinaten $(3,41 | -10,66)$.

- 1c) Der Schnittpunkt der Kurve mit der y -Achse wird mit S bezeichnet. Durch S und $P(1|0)$ wird eine Sekante gezogen. Diese schneidet die Kurve außer in S und P in einem weiteren Punkte Q . Bestimme die Koordinaten von Q .

Lösung: S hat die Koordinaten $(0|f(0)) = (0|-1)$. Die Gerade durch S und P hat also die Gleichung $y = x - 1$. Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt $(x-1)(x^2 - 5x + 1) = x-1$, für Lösungen, die verschieden von 1 sind, also $x^2 - 5x = 0$ mit den Lösungen 0 und 5.

Ergebnis: Die dritte Schnittstelle ist 5; $Q = (5 | f(5)) = (5 | 4)$.

- 1d) Die im Punkte S an den Graphen von f angelegte Tangente schneidet den Graphen in einem weiteren Punkte R. Berechne die Koordinaten von R.

Lösung: Wegen $S = (0 \mid -1)$, $f'(0) = 6$ und der allgemeinen Form der Tangentengleichung

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) \text{ hat die Tangente die Gleichung } y = -1 + 6x .$$

Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 6x - 1$, also $x^3 - 6x^2 = 0$ mit den Lösungen 0 und 6.

Ergebnis: Der gesuchte Schnittpunkt ist $R(6 \mid f(6)) = (6 \mid 35)$.

- 1e) Bestimme $f''(x)$, begründe, dass der Graph genau einen Wendepunkt W hat, gib die Koordinaten von W an und beschreibe das Krümmungsverhalten des Graphen.

Lösung: $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. Dieser Ausdruck ist negativ für $x < 2$ und positiv für $x > 2$.

An der Stelle 2 geht der Graph also von einer Rechtsdrehung in eine Linksdrehung über; der Wendepunkt W hat die Koordinaten $(2 \mid f(2)) = (2 \mid -5)$.

Aufgabe 2: In der zweiten Aufgabe ist in den Teilen a) und b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7$.

- 2a) Bestimme näherungsweise die Steigung des Graphen an der Stelle 2 durch Berechnung der Steigung einer Sekante durch $A(2 \mid f(2))$ und $B(2,1 \mid f(2,1))$.

Lösung: $f(2) = 9$; $f(2,1) = 11,081$

Der Differenzenquotient ist $(f(2,1)-f(2))/(2,1-2)$, also $(11,081-9)/0,1 = 20,81$.

Ergebnis: Die Steigung des Graphen an der Stelle 2 beträgt ca. 20,81.

- 2b) Gib einen Term für die Steigung der Sekante durch $A(2 \mid f(2))$ und $C(x \mid f(x))$ an und vereinfache diesen Term durch Polynomdivision.

Bestimme damit die exakte Steigung des Graphen an der Stelle 2.

Lösung: $(f(x)-f(2))/(x-2) = (x^3 + 2x^2 - 16)/(x-2) = x^2 + 4x + 8$

Wenn x gegen 2 strebt, strebt dieser Ausdruck gegen $4+8+8$, also gegen 20.

Ergebnis: Die exakte Steigung des Graphen an der Stelle 2 beträgt 20.

Die betrachtete Funktion f ist vom Typ $f(x) = x^3 + ax^2 - 7$.

2c) Welchen Wert anstelle von 2 müsste a haben, damit $D(3|2)$ auf dem Graphen liegt?

Lösung: $f(3) = 3^3 + a \cdot 3^2 - 7 = 27 + 9a - 7 = 9a + 20$; damit dieser Ausdruck den Wert 2 annimmt, muss gelten $9a = -18$, also $a = -2$.

Ergebnis: $a = -2$.

2d) Welchen Wert anstelle von 2 müsste a haben, damit die an der Stelle 2 angelegte Tangente parallel zur x-Achse verläuft?

Lösung: $f'(x) = 3x^2 + 2ax$, also ist $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 12 + 4a$. Die Steigung $12 + 4a$ hat den Wert 0, wenn gilt $a = -3$.

Ergebnis: $a = -3$.

AZ: Hier ist $f(x) = (x+5)(x-1)(x-3)$

Za) Gib die Nullstellenmenge von f an und berechne die Steigung des Graphen von f in seinen drei Nullstellen.

Lösung: Aus der Faktorzerlegung liest man ab $\mathbf{O}_f = \{-5; 1; 3\}$.

Ausmultiplizieren des Funktionsterms ergibt $f(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 17$, also $f'(-5) = 48$, $f'(1) = -12$, $f'(3) = 16$.

Ergebnisse: $\mathbf{O}_f = \{-5; 1; 3\}$; die gesuchten Steigungen sind 48 bzw. -12 bzw. 16.

Zb) Stelle die Gleichungen der drei in den Nullpunkten angelegten Tangenten auf.

Lösung: Die allgemeine Form der Tangentengleichung an einer Stelle c lautet:

$y = f(c) + f'(c)(x-c)$, wenn c Nullstelle ist, also $y = f'(c)(x-c)$.

Ergebnis: Die Gleichungen lauten $y = 48(x+5)$, $y = -12(x-1)$ und $y = 16(x-3)$.

Zc) Entscheide mit Begründung, ob die ersten beiden Nullpunkt tangente senkrecht aufeinander stehen.

Lösung: Genau dann stehen zwei Geraden senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt. Da $48 \cdot (-12)$ verschieden von -1 ist, stehen die Tangenten **nicht senkrecht aufeinander**.