

3*45'

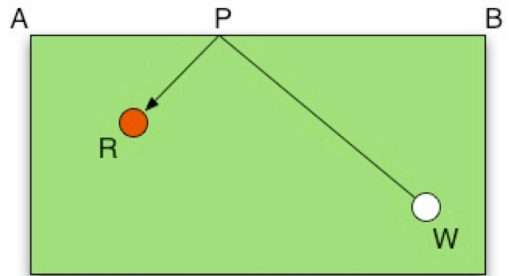
A 1: Auf einem Billardtisch mit Ecken A, B, C, D liegen ein roter und ein weißer Ball R und W. Punktkoordinaten: $A = (0 | 4 | 1)$, $B = (10 | 9 | 11)$, $R = (1 | 3 | 5)$, $W = (6 | 4 | 13)$, $P = (4 | 6 | 5)$.

- 1a) Bestimme eine Parameterdarstellung der Begrenzungsgeraden g durch A und B und zeige, dass P auf dieser Geraden liegt.

Lösung: Die Gerade durch A und B hat allgemein die Parameterdarstellung $\varphi = \vartheta + r(\ell - \vartheta)$, also in diesem

Fall: **g hat die PD: $\varphi = (0|4|1)^T + r(10|5|10)^T$.**

Die Gleichung $\varphi = \vartheta + r(\ell - \vartheta)$, also $(4|6|5)^T = (0|4|1)^T + r(10|5|10)^T$ hat eine Lösung für r , nämlich $r = 0,4$, denn $(0|4|1)^T + 0,4(10|5|10)^T = (4|6|5)^T$. **P liegt also auf g.**



- 1b) Ermittle eine Gleichung der Ebene \mathcal{E} durch W und die Gerade g ; zeige, dass R in der Ebene \mathcal{E} liegt.

Lösung: Die Ebene \mathcal{E} hat die Richtungsvektoren $\mathcal{u} - \vartheta = (6|0|12)^T$ und $\ell - \vartheta = (10|5|10)^T$, ein Normalenvektor hat also die Richtung $(6|0|12)^T \times (10|5|10)^T = 30(-2|2|1)^T$.

Ein geeigneter Normalenvektor ist somit $\mathcal{n} = (-2|2|1)^T$, die Gleichung der Ebene hat die Form $-2x + 2y + z - d = 0$.

Einsetzen der Koordinaten von A ergibt $8 + 1 - d = 0$, also $d = 9$.

Wegen $-2x_R + 2y_R + z_R - 9 = -2 + 6 + 5 - 9 = 0$ liegt R in der Ebene \mathcal{E} .

Die Ebene \mathcal{E} hat die Gleichung $-2x + 2y + z - 9 = 0$ und enthält den Punkt R.

- 1c) Spiegele den Punkt R an der Geraden g und prüfe, ob der Bildpunkt R' auf der Geraden h durch W und P liegt.

Lösung: Zunächst erhält man den Fußpunkt F des Lotes von R auf g als Schnittpunkt der

Geraden g mit der Ebene \mathcal{F} durch R mit Normalenrichtung $\ell - \vartheta$.

Wegen $\ell - \vartheta = (10|5|10)^T = 5(2|1|2)^T$ ist $\mathcal{n}_{\mathcal{F}} = (2|1|2)^T$ ein geeigneter Normalenvektor von \mathcal{F} . $\mathcal{n}_{\mathcal{F}} * \mathcal{r} = (2|1|2)^T * (1|3|5)^T = 2 + 3 + 10 = 15$;

daher hat die Ebene \mathcal{F} die Koordinatengleichung $2x + y + 2z - 15 = 0$.

Um den Schnittpunkt der Ebene \mathcal{F} mit der Geraden g zu berechnen, wird die rechte Seite der Parameterdarstellung von g in die Ebenengleichung eingesetzt:

$2(10r) + (4+5r) + 2(1+10r) - 15 = 0$, also $45r - 9 = 0$ und somit $r = 0,2$.

Daher ist $f = (0|4|1)^T + 0,2(10|5|10)^T = (2|5|3)^T$.

Für den Spiegelpunkt R' gilt $\mathcal{r}' = \mathcal{r} + 2(f - \mathcal{r}) = 2f - \mathcal{r}$ und daher

$\mathcal{r}' = 2(2|5|3)^T - (1|3|5)^T = (3|7|1)^T$; **der Spiegelpunkt ist also $R'(3|7|1)$.**

Genau dann liegt dieser auf der Geraden durch W und P, wenn die Richtungsvektoren

$\mathcal{u} - \varphi = (2|-2|8)^T$ und $\mathcal{r}' - \varphi = (-1|1|-4)^T$ linear abhängig sind; das ist offenbar der

Fall, denn $\mathcal{u} - \varphi = -2(\mathcal{r}' - \varphi)$. **Damit ist gezeigt, dass R auf h liegt.**

- 1d) Bestimme die Größen der Winkel WPB und APR, und erläutere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung: Bezeichnet man die Größen der Winkel WPB und APR mit α bzw. β , so gilt:

α wird aufgespannt von den Vektoren $\mathbf{w} - \varphi$ und $\mathbf{l} - \varphi$; dabei ist

$$\mathbf{w} - \varphi = (2 \mid -2 \mid 8)^T = 2 (1 \mid -1 \mid 4)^T \text{ und } \mathbf{l} - \varphi = (6 \mid 3 \mid 6)^T = 3 (2 \mid 1 \mid 2)^T.$$

Entsprechend wird β aufgespannt von den Vektoren $\mathbf{v} - \varphi$ und $\mathbf{r} - \varphi$; Einsetzen ergibt

$$\mathbf{v} - \varphi = (-4 \mid -2 \mid -4)^T = 2 (-2 \mid -1 \mid -2)^T \text{ und } \mathbf{r} - \varphi = (-3 \mid -3 \mid 0)^T = 3 (-1 \mid -1 \mid 0)^T.$$

Der Kosinus des von zwei Vektoren aufgespannten Winkels ergibt sich als Quotient aus dem Skalarprodukt der Vektoren und dem Produkt ihrer Normen; daher erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \| \cdot \| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \|} = \frac{2 - 1 + 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0,5}.$$

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \| \cdot \| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \frac{2 + 1 + 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0,5}.$$

Beide Winkel haben somit die Größe $\arccos(\sqrt{0,5})$, also 45° .

Die Winkel sind gleich groß, da nach dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) die gegen das Einfallslot gemessenen Winkel gleiche Größe ($90^\circ - \alpha$) haben, in diesem speziellen Fall also ebenfalls 45° betragen.

- A 2:** Mit f wird die (schiefe) Projektion des Raumes in Richtung des Vektors $\vartheta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die x-y-Ebene bezeichnet.

- 2a) Zeige durch Nachrechnen, dass die Seiten des Tetraeders ABCD mit den Ecken A(4|4|-4), B(-4|-4|-4), C(-4|4|4), D(4|-4|4) gleichseitige Dreiecke sind, und berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders.

Lösung: Die zu den sechs Tetraederkanten gehörenden Vektoren sind

$$\begin{aligned} \mathbf{l} - \mathbf{v} &= (-8 \mid -8 \mid 0)^T, \mathbf{r} - \mathbf{v} = (-8 \mid 0 \mid 8)^T, \mathbf{\vartheta} - \mathbf{v} = (0 \mid -8 \mid 8)^T, \\ \mathbf{r} - \mathbf{l} &= (0 \mid 8 \mid 8)^T, \mathbf{\vartheta} - \mathbf{l} = (8 \mid 0 \mid 8)^T, \mathbf{\vartheta} - \mathbf{r} = (8 \mid -8 \mid 0)^T. \end{aligned}$$

Alle Vektoren haben die Norm $8\sqrt{2}$, daher sind alle Dreiecksflächen gleichseitig.

Der Flächeneinhalt F des Dreiecks ABC errechnet sich als $F = \frac{1}{2} \|(\mathbf{l} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{v})\|$.

$$F = \frac{1}{2} \|(-8 \mid -8 \mid 0)^T \times (-8 \mid 0 \mid 8)^T\| = 64 \cdot \frac{1}{2} \|(-1 \mid -1 \mid 0)^T \times (-1 \mid 0 \mid 1)^T\| = 32 \|(-1 \mid 1 \mid 1)^T\| = 32 \cdot \sqrt{3}.$$

Der Oberflächeneinhalt setzt sich aus den Flächen der vier kongruenten Dreiecke zusammen, beträgt also $128 \cdot \sqrt{3}$ Flächeneinheiten.

2b) Bestimme die Matrix M_1 der Abbildung f .

Zur Kontrolle: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: Da die Einheitspunkte E_1 und E_2 auf der x - bzw. y -Achse

in der x - y -Ebene liegen, werden sie auf sich selbst abgebildet. Die ersten beiden Spalten der Matrix sind daher die ersten beiden Einheitsvektoren.

Der dritte Einheitspunkt wird in der Richtung ϑ projiziert. Sein Bild ist also der Schnittpunkt der x - y -Ebene mit der Geraden, deren Parameterdarstellung lautet $\varphi = \pi_3 + r \vartheta$, also $\varphi = (3r \mid 2r \mid 1 + r)^T$. In der x - y -Ebene ist die dritte Komponente null, also $1 + r = 0$; somit ist $\pi_3' = (-3 \mid -2 \mid 0)^T$. Dies liefert die dritte Spalte der (oben bereits angegebenen) Matrix.

2c) Berechne die Koordinaten der Bildpunkte A' , B' , C' , D' bei der angegebenen Abbildung f und zeichne das Bild (den „Schatten“) des Tetraeders in der x - y -Ebene.

Lösung: Unter Verwendung der Abbildungsmatrix erhält man

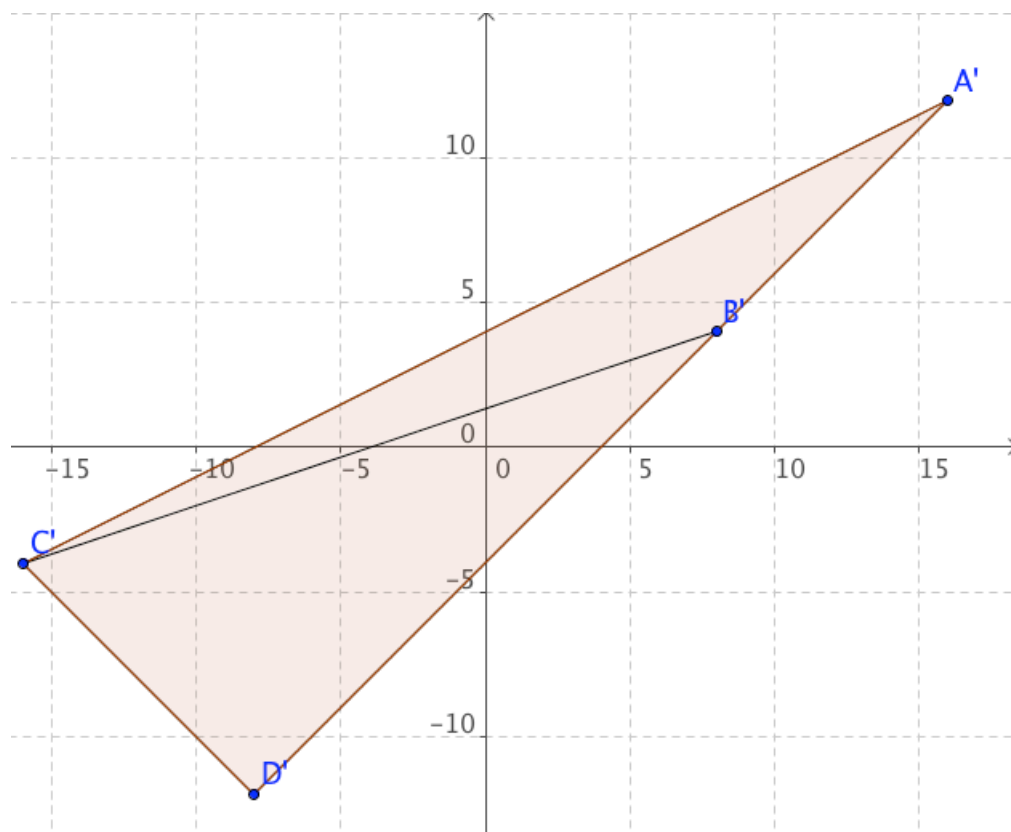
$$A' = (1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 - 3 \cdot (-4) \mid 0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) \mid 0) = (16 \mid 12 \mid 0)$$

$$B' = (1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-4) - 3 \cdot (-4) \mid 0 \cdot (-4) + 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-4) \mid 0) = (8 \mid 4 \mid 0)$$

$$C' = (1 \cdot (-4) + 0 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \mid 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \mid 0) = (-16 \mid -4 \mid 0)$$

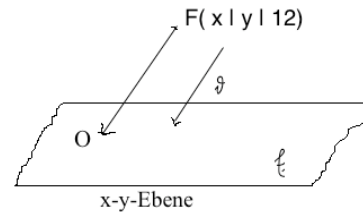
$$D' = (1 \cdot 4 + 0 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 \mid 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 \mid 0) = (-8 \mid -12 \mid 0)$$

Mit den Bildpunkten $A'(16 \mid 12 \mid 0)$, $B'(8 \mid 4 \mid 0)$, $C'(-16 \mid -4 \mid 0)$, $D'(-8 \mid -12 \mid 0)$ erhält man den unten dargestellten Schatten des Tetraeders in der x - y -Ebene.



- 2d) Deutet man die Projektionsstrahlen als Sonnenstrahlen, dann fällt der (punktförmige) Schatten eines Flugkörpers über der x-y-Ebene, der sich in der Höhe 12 über dieser Ebene befindet, auf den Ursprung $O(0|0|0)$. Gib die Koordinaten des Flugkörpers an .

Lösung: Die Verbindungsgerade g zwischen Flugobjekt und Schattenpunkt hat mit dem Aufpunkt O und dem Richtungsvektor ϑ die Parameterdarstellung $\varrho = (3r \mid 2r \mid r)^T$; dabei gibt der Betrag der z-Komponente den Abstand von der x-y-Ebene an.



Da F über der x-y-Ebene die Höhe 12 hat, hat sein Ortsvektor die Form $f = (x|y|12)^T$. da F außerdem auf der Geraden g liegt, folgt $(x|y|12)^T = (3r \mid 2r \mid r)^T$; also ist $r = 12$.

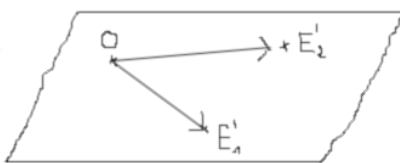
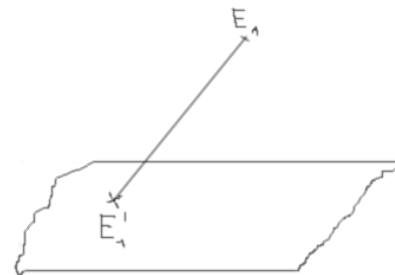
Der Flugkörper hat somit die Koordinaten (36 | 24 | 12).

- 2e) Auch die folgende Matrix M_2 gehört zu einer schiefen Projektion:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & 8 \\ 15 & -30 & 16 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Projektionsrichtung sowie den Normalenvektor der Ursprungsebene, in die projiziert wird.

Lösung: Der Einheitspunkt E_1 hat den Bildpunkt $E_1' = (1|8|15)$. Die Projektionsrichtung ergibt sich aus dem Verbindungspfeil von E_1 zu E_1' , also als Differenzvektor von κ_1 und κ_1' : $(1|8|15)^T - (1|0|0)^T = (0|8|15)^T$.



Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren, sie sind somit Ortsvektoren von Punkten der Bildebene. Da diese den Ursprung enthält, sind sie gleichzeitig Richtungsvektoren der Ebene.

Zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind somit beispielsweise die Vektoren $\kappa_1' = (1|8|15)^T$ und $\kappa_2' = (0|15|30)^T = 8 \cdot (0|1|2)^T$.

Die Richtung der Normalen ist also $(1|8|15)^T \times (0|1|2)^T = (1|-2|1)^T$.

Ergebnisse: **Die Projektionsrichtung ist $\vartheta = (0|8|15)^T$, ein Normalenvektor der Ursprungsebene, in der die Bildpunkte liegen, ist $\kappa = (1|-2|1)^T$.**