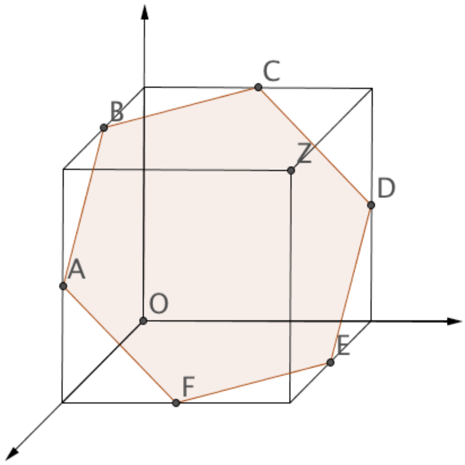
Gymnasium Leichlingen

2009 $13m_3$ Lö 2008/09.2 **A/L der Klausur unter Abiturbedingungen** 2009-03-12

3*60‘



A1: Der rechts abgebildete Würfel hat die gegenüberliegenden Ecken O(0|0|0) und Z(2|2|2). Er wird durch eine Ebene $\mathfrak{E}$ so in zwei Teile zerlegt, dass als Schnittfläche das regelmäßige Sechseck entsteht, dessen Ecken die Kantenmittelpunkte A(2|0|1), B(1|0|2), C(0|1|2), D(0|2|1), E(1|2|0) und F(2|1|0) (s. Skizze rechts) sind.
Die Ursprungsgerade durch Z wird mit g bezeichnet.

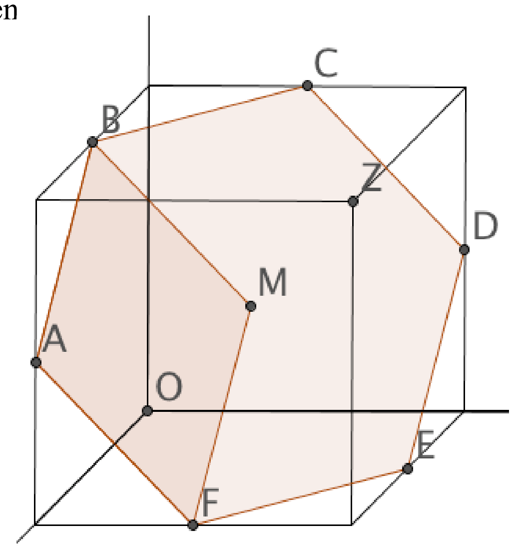
a) Bestimme Parameterdarstellungen von $\mathfrak{E}$ und g und zeige, dass g orthogonal zu $\mathfrak{E}$ verläuft; bestimme den Schnittpunkt M von g mit $\mathfrak{E}$.

[Zur Kontrolle: $\mathfrak{E}$: x + y + z = 3, M = (1|1|1)]

Lösung: $\mathfrak{E}$ ist die Ebene durch A, B und C, hat also die PD $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + r\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + s\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$;
Die Ursprungsgerade g hat die Parameterdarstellung g: $\mathfrak{x} = t\,\mathfrak{z}$.
Einsetzen der Komponenten ergibt die folgenden Parameterdarstellungen:
$\mathfrak{E}$: $\mathfrak{x} = (2|0|1)^T + r\,(-1|0|1)^T + s\,(-2|1|1)^T$; g: $\mathfrak{x} = t\,(2|2|2)^T$.
Die Normalenrichtung von $\mathfrak{E}$ errechnet sich als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:
$(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = (2|0|1)^T \times (-1|0|1)^T = -(1|1|1)^T$; Normalenvektor ist $\mathfrak{n} = (1|1|1)^T$.
Da g die Richtung der Normalen hat, verläuft die Gerade orthogonal zur Ebene.
Der Schnittpunkt von g und $\mathfrak{E}$ ergibt sich bereits aus Symmetriegründen als Mittelpunkt der Strecke OM, also als M(1|1|1). Dies Ergebnis erhält man auch durch Einsetzen der Parameterdarstellung von g in die Ebenengleichung von $\mathfrak{E}$:
Wegen $\mathfrak{a} * \mathfrak{n} = (2|0|1)^T * (1|1|1)^T = 3$ hat $\mathfrak{E}$ die Gleichung x + y + z - 3 = 0;
Einsetzen ergibt 2t + 2t + 2t - 3 = 0, also t = 0,5 und damit $\mathfrak{m} = 0{,}5\,(2|2|2)^T = (1|1|1)^T$.

b) Zeige, dass das Viereck AFMB eine Raute ist, und berechne seinen Flächeninhalt.

[Zur Kontrolle: Die Raute AFMB hat den Flächeninhalt √3 .]



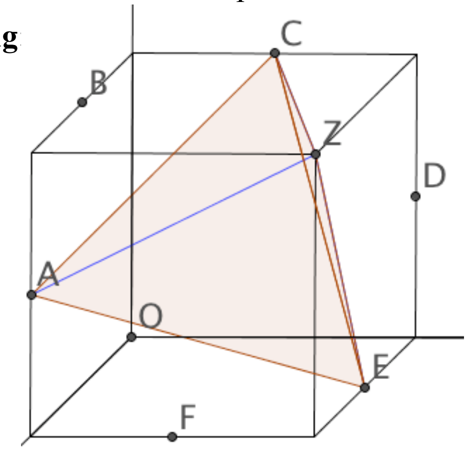
Lösung: Eine Raute ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten; zum Parallelogrammnachweis reicht es zu zeigen, dass $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{m} - \mathfrak{f}$ ist.
$\mathfrak{m} - \mathfrak{f} = (1|1|1)^T - (2|1|0)^T = (-1|0|1)^T = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$;
das Viereck AFMB ist also ein Parallelogramm.
Die benachbarten Seiten AB und BM haben die Längen $\|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\| = \|(-1|0|1)^T\| = \sqrt{2}$ und
$\|\mathfrak{m} - \mathfrak{b}\| = \|(1|1|1)^T - (1|0|2)^T\| = \|(0|1|-1)^T\| = \sqrt{2}$,
sind also gleich lang.
Somit ist das Viereck als Raute nachgewiesen.
Der Flächeninhalt F des Parallelogramms ist zu berechnen als $F = \|(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{m} - \mathfrak{b})\| = \|(-1|0|1)^T \times (0|1|-1)^T\| = \|(-1|-1|-1)^T\| = \sqrt{3}$.

c) Zeige, dass der Würfel die Kantelänge 2 hat, und bestimme die Gesamtkantenlänge von Würfel und Sechseck.

Lösung: Da ein Würfel der Kantenlänge a eine Raumdiagonale der Länge a $\sqrt{3}$ hat, ergibt sich wegen $|OZ| = \|\mathfrak{z} - \mathfrak{o}\| = \|\mathfrak{z}\| = \|(2|2|2)^T\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, dass hier a = 2 gelten muss. Die Seitenlänge des regelmäßigen Sechssecks wurde in Aufgabenteil b als $|AB| = \sqrt{2}$ berechnet. Aus den 12 Würfelkanten der Länge 2 und den sechs Sechseckseiten der Länge $\sqrt{2}$ ergibt sich seine Gesamtkantenlänge von $k = 12 \cdot 2 + 6 \cdot \sqrt{2} = 24 + 6 \cdot \sqrt{2}$.

d) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches das Dreieck AEC als Grundfläche und den Punkt Z als Spitze hat.

Lösung



Das Volumen des von $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{e} - \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z} - \mathfrak{a}$ aufgespannten Tetraeders ergibt sich als Betrag von einem Sechstel des Spatprodukts der drei aufspan nenden Vektoren:

$$V \;= |\,[(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}, \mathfrak{e} - \mathfrak{a}, \mathfrak{z} - \mathfrak{a}]\,| / 6$$
$$= |\,[(-2|1|1)^T, (-1|2|-1)^T, (0|2|1)^T]\,| / 6$$
$$= 9/6 = 1{,}5\ .$$

Das gesuchte Volumen beträgt 1,5 [VE] .

Ein alternativer Lösungsweg berechnet den Flächeninhalt von Dreieck AEC sowie die zugehörige Höhe h des Tetraeders. Dabei ergibt sich h als Länge der Strecke ZM, also als $h = \|\mathfrak{m}\|/2 = \|(2|2|2)^T\|/2 = \sqrt{12} / 2 = \sqrt{3}$, da g als orthogonal zu $\mathfrak{E}$ nachgewiesen wurde, oder umständlicher mithilfe der Hesseform für die Ebene $\mathfrak{E}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks AEC kann als halbe Norm von $(\mathfrak{e} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$ berechnet werden. Alternativ verwendet man die bekannte Formel $F = a^2 \sqrt{3} /2$ für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a mit $a = |AE| = \|\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\| = \|(-1|2|-1)^T\| = \sqrt{6}$. Für das Volumen V hat man dann $V = F\,h / 3 = (6\sqrt{3} /2)\,(\sqrt{3}) / 3 = 1{,}5$.

e) Durch die Verbindung der Ecken A, E, C untereinander und mit O und Z entsteht das Kantenmodell einer Doppelpyramide. Entscheide, ob eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius 0,8 im Inneren dieser Doppelpyramide Platz hat.

Lösung: Die Kugel passt in die Doppelpyramide, wenn ihr Mittelpunkt von allen Seitenflächen weniger als 0,8 entfernt ist. Aufgrund der Symmetrie genügt die Überprüfung des Abstands, den M von der Ebene durch O, A und C. Diese Ebene wird nachfolgend mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. $\mathfrak{F}$ ist eine Ursprungsebene mit den Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, ihre Normalenrichtung ist also $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} = (2|0|1)^T \times (0|1|2)^T = (-1|-4|2)^T$.

Wegen $\|(-1|-4|2)^T\| = \sqrt{21}$ hat die Gleichung von $\mathfrak{F}$ die Hesseform $1/\sqrt{21}\,(-x -4y + 2z) = 0$.

Koordinaten von M einsetzen: $d(M, \mathfrak{F}) = |\,-1- 4+2|\,/ \sqrt{21} = 3/\sqrt{21} = 0{,}65... < 0{,}8$.

Ergebnis: M hat also von den Seitenflächen der Doppelpyramide einen kleineren Abstand als 0,8 , somit hat die Kugel im Innern keinen ausreichenden Platz.

A 2: Auf der Drehscheibe eines Karussells sitzen zwei Personen (Anna und Otto) auf Plätzen mit den Koordinaten A(1 | 1) und O(0 | 0). Das Drehzentrum ist Z(4 | 5). Am Ende der Karussellfahrt hat der Platz von Anna die Koordinaten A'(8 | 2). Bestimme O', also Ottos Endposition.

Lösung: Zunächst wird die Größe α des Drehwinkels AZA' berechnet:

$(\mathfrak{z} - \mathfrak{a}) * (\mathfrak{z} - \mathfrak{a}') = \|\mathfrak{z} - \mathfrak{a}\|\ \|\mathfrak{z} - \mathfrak{a}'\| \cos(\alpha)$.

$(\mathfrak{z} - \mathfrak{a}) * (\mathfrak{z} - \mathfrak{a}') = (3 \mid 4)^T * (-4 \mid 3)^T = 0$. Die Richtung von ZA ist also orthogonal zur Richtung von ZA'. Der Drehwinkel beträgt also 90°. Eine Skizze (oder die Vorstellung) zeigt, dass die Drehung im mathematisch positive Sinn erfolgt.

Um nun das Bild von O zu erhalten, wird zunächst das Koordinatensystem um $-\mathfrak{z}$ verschoben, wobei O in P(-4|-5) übergeht, dann wird P um 90° gedreht. Die 90°-Drehung um den Ursprung hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $M\,\mathfrak{p} = (5 \mid -4)^T$ und $\mathfrak{o}' = (5 \mid -4)^T + (4 \mid 5)^T = (9 \mid 1)^T$ ergibt sich:

Die Endposition von Otto ist O'(9 | 1).

Aufgabe 3: In Aufgabe 3 geht es um die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{2-x}$.

a) Berechne f'(x) und f''(x), und zeige, dass der Graph einen relativen Tiefpunkt T und einen relativen Hochpunkt H hat; bestimme die Koordinaten von T und H.

Lösung: Nach Produktregel und Kettenregel ergeben sich die folgenden Ableitungen

$f'(x) = (2x - 2 - x^2 + 2x - 1)\, e^{2-x} = (-x^2 + 4x - 3)\, e^{2-x}$

$f''(x) = (-2x + 4 + x^2 - 4x + 3)\, e^{2-x} = (x^2 - 6x + 7)\, e^{2-x}$.

Wegen $f'(x) = -(x^2 - 4x + 3)\, e^{2-x} = -(x - 1)(x-3)\, e^{2-x}$ ist $\mathbf{O}_{f'} = \{1; 3\}$. f'(x) ist über dem Intervall]1; 3[negativ und außerhalb des Intervalls positiv. Somit geht der Graph an der Stelle 1 vom Fallen ist Steigen über und bei 3 vom Steigen wieder ins Fallen. Daher liegt bei 1 ein Tiefpunkt T und bei 3 ein Hochpunkt H.

Dabei ist $T = (1 \mid f(1)) = (1 \mid 0)$ und $H = (3 \mid f(3)) = (3 \mid 4e^{-1}) \approx (3 \mid 1{,}47)$.

b) Die Graphen von f und von f' schneiden sich an zwei Stellen. Ermittle diese beiden Stellen (durch einen grundlegenden Lösungsweg, also nicht lediglich durch Erraten).

[Zur Kontrolle: Die Schnittstellen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.]

Lösung: Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt $(x^2 - 2x + 1)\, e^{2-x} = (-x^2 + 4x - 3)\, e^{2-x}$, also nach Zusammenfassen $(2x^2 - 6x + 4)\, e^{2-x} = 0$. Da e^{2-x} überall verschieden von null ist, erhält man die Lösungen aus der Gleichung $2x^2 - 6x + 4 = 0$.

Die Faktorzerlegung $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$ zeigt: Die Lösungen sind 1 und 2.

c) Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = (- x^2 - 1)\, e^{2-x}$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung: Nach Produktregel und Kettenregel ergibt sich

$F‘(x) = -2x\, e^{2-x} + (x^2 + 1)\, e^{2-x} = (x^2 - 2x + 1)\, e^{2-x} = f(x)$.

Damit ist F als Stammfunktion zu f nachgewiesen.

d) Berechne den Inhalt der von den Graphen von f und f‘ gemeinsam berandeten Fläche.

Die Graphen schließen über dem Intervall [1; 2] das betrachtete Flächenstück ein. Wegen $f(1{,}5) = (1{,}5^2 - 2\ 1{,}5 + 1)\, e^{0{,}5} = 0{,}25\, e^{0{,}5}$ und $f‘(1{,}5) = (-1{,}5^2 + 4\ 1{,}5 - 3)\, e^{0{,}5} = 0{,}75\, e^{0{,}5}$ verläuft im betrachteten Intervall der Graph von f‘ oberhalb des Graphen von f.

Der gesuchte Flächeninhalt A ergibt sich damit als Integral von f‘ - f über [1; 2] .

$$A = \int_1^2 f'(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = [f(x)]_1^2 - [F(x)]_1^2 = f(2) - f(1) - F(2) + f(1)$$
$$= f(2) - f(1) - F(2) + f(1) = 1 - 0 - (-4 - 1)e^0 + (-1 - 1)e = 6 - 2e.$$

Ergebnis: Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt 6 - 2e (≈ 0,563) FE .

e) Rechts von seinem Tiefpunkt schließt der Graph von f mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Lösung: Da $f(x) = (x-1)^2\, e^{2-x}$ für keinen Wert von x negativ ist, verläuft der Graph von f nir gends unterhalb der x-Achse. Für $p > 1$ und eingeschränkt auf das Intervall von 1 bis p beträgt der Inhalt der betrachteten Fläche $F(p) - F(1) = (-p^2-1)e^{2-p} + 2e$; für p gegen unendlich strebt dieser Wert gegen 2e, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenzfunktion, also $(-p^2-1)e^{2-p} = e^2\, (-p^2-1) / e^p$ für unbeschränkt wachsendes p gegen null strebt. Der zu berechnende Flächeninhalt beträgt also 2e (≈ 5,4) FE .

Skizze der Graphen von f und f‘ zu Aufgabe 3.