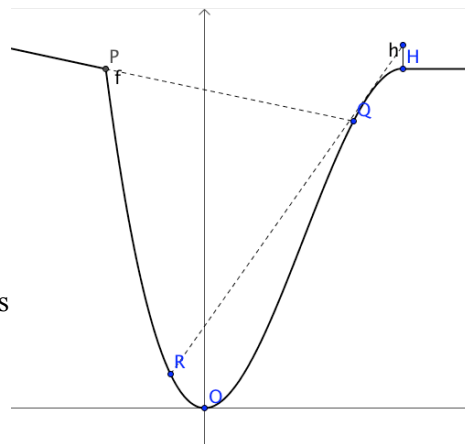


## Aufgabe 1

Ein Flusstal soll mithilfe einer Funktion  $f$  beschrieben werden. Dazu wird folgender Ansatz gemacht:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Zwischen dem Hochpunkt  $H$  des Graphen von  $f$  und dem Punkt  $P(-2|f(-2))$  wird das Flusstal durch den Graphen von  $f$  beschrieben. Des Weiteren verläuft das Profil des angrenzenden Geländes von  $H$  aus horizontal (nach rechts) und von  $P$  aus in Richtung der Geraden durch die Punkte  $P$  und  $Q(3 | f(3))$ . Die nebenstehende Skizze dient nur der Orientierung und ist nicht maßstabsgetreu.



a) Untersuche den Graphen der Funktion  $f$  auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte (unabhängig vom Kontext der Aufgabe). Bestimme die Gleichung der Geraden durch  $P$  und  $Q$ ; gib Funktionsterme zu  $f(x)$  für  $x < -2$  und  $x > 4$  an.

### Lösung:

Wegen  $f(0) = 0$  verläuft der Graph von  $f$  durch den Ursprung; an der Faktorzerlegung  $f(x) = -x^2(x-6)/8$  liest man für den Funktionsterm von  $f$  die weitere Nullstelle 6 ab. (Diese liegt außerhalb des im Kontext der Aufgabe betrachteten Graphenverlaufs von  $P$  zu  $H$ .)

Die erste Ableitung hat wegen  $f'(x) = -3x^2/8 + 3x/2 = -3x(x-4)/8$  die Nullstellenmenge  $O_f = \{0; 4\}$ . Da  $f'$  bei 0 einen minus/plus- und bei 4 einen plus/minus-Vorzeichenwechsel hat, liegt bei 0 in Minimum und bei 4 ein Maximum.

Tiefpunkt ist also der Ursprung, relativer Hochpunkt ist  $H(4|4)$ .

Die zweite Ableitung hat wegen  $f''(x) = -3x/4 + 3/2 = -3(x-2)/4$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei 2; wegen  $f(2) = 2$  ist daher ist  $W(2|2)$  ein Wendepunkt.

Die Gerade durch  $P$  und  $Q$  hat die Gleichung  $y = y_P + (y_Q - y_P)/(x_Q - x_P)(x - x_P)$ ; wegen  $f(3) = 3,375$  erhält man somit die Gleichung  $y = 4 + (3,375 - 4)/(3 + 2)(x + 2)$ , also  $y = -0,125x + 3,75$ .

**Ergebnisse:** Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse ist  $O$ , Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse sind  $O$  und  $S(6|0)$ .

$O$  ist auch gleichzeitig Tiefpunkt; Hochpunkte sind  $H(4|4)$  und  $P(-2|4)$ ;

Wendepunkt ist  $W(2|2)$ ;

$g$  hat die Gleichung  $y = -0,125x + 3,75$ .

Für  $x$  außerhalb von  $[-2;4]$  ist  $f(x) = -0,125x + 3,75$  für  $x < -2$ ; und es ist  $f(x) = 4$  für  $x > 4$ .

b) Bei einem starken Hochwasser stieg das Wasser bis zum Punkt  $H$ . Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Tales.

### Lösung:

Die Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist, wird oben von der Geraden durch  $P$  und  $H$ , also der Horizontalen mit der Gleichung  $y = 4$ , und von unten vom Graphen von  $f$  eingeschlossen.

Da das zugehörige Intervall auf der  $x$ -Achse von  $-2$  bis  $4$  reicht, ist zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts  $A$  die Funktion mit dem Term  $4 - f(x)$  über  $[-2; 4]$  zu integrieren:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^4 (4 - f(x)) dx = \int_{-2}^4 \left(4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right) dx = \left[4x + \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^4 \\
&= 4 \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 4^4 - \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \left(4 \cdot (-2) + \frac{1}{32} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^3\right) \\
&= 16 + 8 - 16 - \left(-8 + \frac{1}{2} + 2\right) = 13,5.
\end{aligned}$$

**Ergebnis:** Der Inhalt der Querschnittfläche beträgt 13,5 Flächeneinheiten.

c) Von H soll eine unterirdische, gerade Leitung ausgehen, deren Darstellung in der Skizze bei einem Punkt B(u | f(u)) mit  $0 < u < 4$  endet. Bestimme B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

**Lösung:**

Der Verlauf der Leitung ist am steilsten, wenn sie den Graphen von f im Punkte B berührt. Es wird also die durch H gezogene Gerade gesucht, die Tangente des Graphen in einem Punkt zwischen O und H ist. Gleichsetzen der Steigung der Geraden durch H und B mit der Steigung des Graphen von f im Punkte B liefert die Gleichung  $(y_H - f(u))/(x_H - u) = f'(u)$ . Einsetzen der Werte und Funktionsterme ergibt:

$$\frac{4 + \frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2}{4 - u} = -\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}u; \quad \text{Multiplikation beider Seiten mit } 8(4 - u):$$

$$32 + u^3 - 6u^2 = (4 - u)(-3u^2 + 12u)$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite, Zusammenfassen und Dividieren beider Seiten durch 2 ergibt:

$$32 + u^3 - 6u^2 = -12u^2 + 48u + 3u^3 - 12u^2$$

$$2u^3 - 18u^2 + 48u - 32 = 0, \text{ also } u^3 - 9u^2 + 24u - 16 = 0.$$

Faktorisieren, z.B. durch zweimalige Division durch (u-4) ergibt schließlich  $(u-4)^2(u-1) = 1$ .

Die einzige Lösung im betrachteten Intervall ist also  $u = 1$ . Wegen  $f(1) = 0,625$  erhält man:

**Ergebnis:** Der Punkt B hat die Koordinaten (1 | 0,625).

d) Bei Trockenheit ist der Wasserspiegel bis zum Punkt R(-1 | f(-1)) abgesunken.

Gib einen vollständigen Lösungsplan an zur Beantwortung der Frage „Ab welcher Höhe h über dem Hochpunkt H ist dieser Punkt R zu sehen?“. Eine rechnerische Durchführung ist nicht erforderlich.

**Lösung:**

(1) Zunächst wird analog zu Aufgabenteil c (also mit dem Ansatz  $f'(x_T) \cdot (x_R - x_T) = y_R - y_T$ ) der x-Wert  $x_T$  des Punktes T auf dem Graphen bestimmt, für den die Gerade durch R und T eine Tangente ist.

(2) Durch Einsetzen des Wertes  $x_T$  in die Funktionsgleichung von f ergibt sich dann die Koordinate  $y_T$ .

(3) Danach wird der Funktionsterm t(x) der Geraden durch R und T, also der von R aus an den Graphen gezogenen Tangente bestimmt.

(4) Die gesuchte Höhe h ergibt sich schließlich als  $t(x_H) - y_H$ .

Nachfolgend wird die in der Klausur nicht verlangte Berechnung von h ausgeführt:

Bezeichnet man den Punkt, an dem die gesuchte Tangente den Graphen von f berührt, mit T(u | f(u)), also  $u = x_T$ , dann hat die Tangente einerseits als Gerade durch R und T die Steigung  $(y_T - y_R)/(u - x_R)$ , andererseits als im Punkt T angelegte Tangente die Steigung  $f'(u)$ .

Wegen  $f(-1) = 7/8$  ergibt sich entsprechend dem Ansatz zum Aufgabenteil c) daher die Gleichung  $f(u) - 7/8 = (u + 1) \cdot f'(u)$ , also nach Einsetzen der Terme für f(u), f'(u) und Multiplikation mit 8

$$-u^3 + 6u^2 - 7 = (u+1)(-3u^2 + 12u), \text{ also } -u^3 + 6u^2 - 7 = -3u^3 + 9u^2 + 12u.$$

Dies liefert

$$2u^3 - 3u^2 - 12u - 7 = 0. \text{ Da } -1 \text{ eine Lösung ist, kann man } (u+1) \text{ ausklammern: } (u+1)(2u^2 - 5u - 7) = 0;$$

durch erneutes Ausklammern von  $u+1$  ergibt sich schließlich  $(u+1)^2(2u-7) = 0$ ;  
die gesuchte Berührstelle ist also  $u = 3,5$ .

Die betrachtete Tangente hat die Gleichung  $t(x) = y_R + m_{RT}(x-x_R)$ , also wegen  $m_{RT} = f'(3,5) = 0,65625$ :  
 $t(x) = 0,875 + 0,65625(x + 1)$ ; somit ist  $h = t(4) - 4 = 0,875 + 0,65625 \cdot 5 - 4 = 0,15625$ ;

**Ergebnis: Der Punkt R ist ab der Höhe 0,15625 zu sehen.**

## Aufgabe 2

Gegeben ist der Punkt  $P(12 | 16)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene. Die  $90^\circ$ -Drehung  $f$  dieser Ebene um den Ursprung ist bekanntlich eine lineare Abbildung des Raumes  $\mathbf{R}^2$  in sich.

a) Beschreibe, wie die Matrix einer linearen Abbildung aufgebaut ist, und gib die Matrix von  $f$  an.

### Lösung:

Die Matrix einer linearen Abbildung des Raumes  $\mathbf{R}^n$  in sich ist eine Matrix aus  $n$  mal  $n$  Spalten; dabei sind die Spalten die Bilder der Einheitsvektoren.

Die gesuchte Matrix von  $f$  erhält man nun

- entweder durch die Überlegung: Bei der  $90^\circ$ -Drehung um den Ursprung geht der Einheitspunkt  $E_1(1|0)$  in den Punkt  $(0|1)$ , der Einheitspunkt  $E_2(0|1)$  in den Punkt  $(-1|0)$  über,

- oder durch Verwendung der aus dem Unterricht bekannten (oder der Formelsammlung entnommenen) Matrix:

Die  $\alpha$ -Drehung der Ebene um  $\mathbf{O}$  hat die Matrix  $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$   
mit Einsetzen  $\cos(90^\circ) = 0$ ;  $\sin(90^\circ) = 1$ .

**Ergebnis: Die gesuchte Abbildungsmatrix hat die Spalten  $(0 | 1)^T$  und  $(-1 | 0)^T$ .**

b) Bezeichne den Bildpunkt von  $P$  bei der Drehung aus a) mit  $R$  und bestimme die Koordinaten von  $R$  sowie die Koordinaten der vierten Ecke  $Q$  des Quadrats  $OPQR$ .

### Lösung:

Die  $90^\circ$ -Drehung führt den Punkt  $P$  in den Punkt  $R$  über:

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

**Ergebnisse: R hat die Koordinaten  $(-16 | 12)$ , Q hat die Koordinaten  $(-4 | 28)$ .**

c) Senkrecht zur  $x$ - $y$ -Ebene wird nun durch den Ursprung eine dritte Achse ( $z$ -Achse) gelegt. Im neuen, nun räumlichen Koordinatensystem hat  $P$  die Koordinaten  $(12 | 16 | 0)$ . Ergänze das Quadrat  $OPQR$  zu einem Würfel  $OPQRSTUV$  und zeige, dass  $W(-2 | 14 | 10)$  der Schwerpunkt des Würfels ist.

### Lösung:

Die Kantenlänge des Würfels ist die Länge der Strecke  $OP$ , also 20 (Norm von  $\mathbf{p}$ ). Die vier Ecken des Grundflächenquadrats werden um 20 Einheiten in Richtung der positiven  $z$ -Achse verschoben. Die vier anderen Ecken des Würfels sind also  $S(0 | 0 | 20)$ ,  $T(12 | 16 | 20)$ ,  $U(-4 | 28 | 20)$ ,  $V(-16 | 12 | 20)$ .

Der Ortsvektor  $\mathbf{w}$  des Schwerpunkts ergibt sich nach der Schwerpunktformel als

$$\mathbf{w} = (1/8)(\mathbf{o} + \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t} + \mathbf{u} + \mathbf{v});$$

oder einfacher aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Würfels der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Raumdiagonale, also z.B. von OU:

$$W = (-4/2 \mid 28/2 \mid 20/2) = (-2 \mid 14 \mid 10).$$

d) Durch die Punkte O, P und W wird eine Ebene  $E$  gelegt. Ermittle Parametergleichung und Koordinatengleichung von  $E$  und bestimme den Winkel  $\alpha$ , den  $E$  mit der x-y-Ebene bildet.

**Lösung:**

Mit dem Aufpunkt O und den Richtungsvektoren  $p$  und  $w$  erhält man die folgende Parameterdarstellung von  $E$ :  $x = r p + s w$ ,

$$\text{also } x = r (12 \mid 16 \mid 0)^T + s (-2 \mid 14 \mid 10)^T.$$

oder mit vereinfachten Richtungsvektoren  $x = r (3 \mid 4 \mid 0)^T + s (-1 \mid 7 \mid 5)^T.$

Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren ergibt ein Vielfaches des Normalenvektors  $n_E$  von  $E$ .

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ein geeigneter Normalenvektor ist somit  $n_E = (4 \mid -3 \mid 5)^T$ ;  
 $E$  hat die Gleichung  $4x - 3y + 5z = 0$ .

Der Kosinus des gesuchten Winkels ergibt sich mithilfe der Normalenvektoren der x-y-Ebene und der Ebene  $E$  nach der Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos(45^\circ)$$

Ergebnisse: **Eine Parametergleichung von  $E$  ist  $x = r (3 \mid 4 \mid 0)^T + s (-1 \mid 7 \mid 5)^T$ ,  
 die Koordinatengleichung von  $E$  lautet  $4x - 3y + 5z = 0$ ,  
 die Größe des Winkels  $\alpha$ , den  $E$  mit der x-y-Ebene bildet, beträgt  $45^\circ$ .**

e) Die Ursprungsebene  $F$ , die senkrecht zur x-Achse verläuft, zerschneidet den Würfel in zwei Teile. Welche Masse hat der kleinere der beiden Teile, wenn die Masse des gesamten Würfels 8 kg beträgt? Hinweis: Der Anteil des abgeschnittenen Würfelstücks am ganzen Würfel ist der gleiche wie der Anteil des durch die y-Achse vom Quadrat OPQR abgetrennten Dreiecks an der Grundfläche des Würfels.

**Lösung:**

Die Strecke PQ hat die Steigung  $m = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q) = (16 - 28)/(12 + 4) = -12/16 = -3/4$ .

Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung  $y = y_P + m(x - x_P)$ , also  $y = 16 - 0,75(x - 12)$ ; somit beträgt ihr y-Achsen-Abschnitt  $16 + 0,75 \cdot 12 = 25$ .

Wird der Schnittpunkt von PQ mit der y-Achse mit B bezeichnet, dann hat das Dreieck OPB zur Grundseite BO die Grundseitenlänge 25 und die Höhe 12, also den Flächeninhalt  $25 \cdot 12 / 2 = 150$ . Das ist - bezogen auf die gesamte Grundfläche von 400 ein Anteil von  $150/400$ , also  $3/8$ .

Der Anteil des abgeschnittenen Stücks am Gesamtvolumen und der Gesamtmasse beträgt somit ebenfalls  $3/8$ .

Die gesuchte Masse ist somit  $3/8 \cdot 8$  kg, also 3 kg

Ergebnis: **Die gesuchte Masse beträgt 3 kg.**

