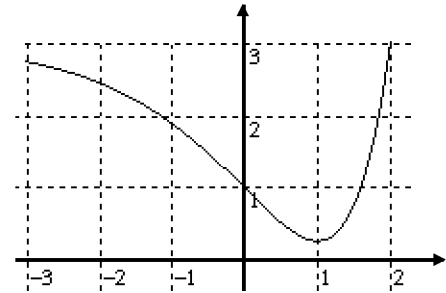


Aufgabe 1

Die Skizze rechts stellt die Umsatzentwicklung eines Unternehmens über die fünf Jahre von Ende 2000 bis Ende 2005 dar; zur Vereinfachung der Beschreibung ist das Definitionsintervall auf $[-3; 2]$ verschoben worden.

Eine Einheit auf der y-Achse entspricht in der Skizze rechts einem Betrag von 10 000 Euro.



- 1a) Beschreiben Sie anhand des Graphen die Umsatzentwicklung; berücksichtigen Sie dabei auch das Krümmungsverhalten der Kurve.

Lösung: Der Umsatz des Unternehmens lag Ende 2000 bei ca. 27000 Euro und war bereits fallend. In den folgenden Jahren verringerte er sich mit zunehmender Geschwindigkeit bis er Ende 2003 auf ca. 10000 Euro gefallen war. Danach fiel der Umsatz zwar weiter, jetzt aber immer langsamer, und betrug Ende 2004 ca. 2200 Euro. Von diesem Zeitpunkt an stieg der Umsatz wieder mit zunehmender Geschwindigkeit und erreichte am Ende des Beobachtungszeitraums einen Wert von ca. 30000 Euro.

- 1b) Der Kurvenverlauf entspricht dem dem Verlauf des Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3 + (x - 2) \cdot \exp(x)$. Präzisieren Sie hiermit die kritischen - für die Bearbeitung von Aufgabenteil a) wesentlichen - Punkte.

Lösung: Als erste und zweite Ableitung bei x erhält man mit der Produktregel

$$f'(x) = (x - 2) \cdot \exp(x) + 1 \cdot \exp(x) = (x - 1) \cdot \exp(x)$$

$$f''(x) = (x - 1) \cdot \exp(x) + 1 \cdot \exp(x) = x \cdot \exp(x)$$

Da $\exp(x)$ stets positiv ist, nimmt f' links von 1 negative und rechts von 1 positive Werte an; der Graph fällt also über $[-3; 1]$ und steigt über $[1; 2]$ jeweils streng monoton, hat an den Stellen -3 und 2 relative Hochpunkte und bei 1 seinen absoluten Tiefpunkt. Wegen $f(-3) = 3 - \exp(-3) < 3 = f(2)$ ist der rechte Endpunkt der Kurve ihr absoluter Hochpunkt.

Die einzige Nullstelle von f'' ist 0 ; da hier das Vorzeichenwechsel von minus nach plus stattfindet, liegt ein rechts-links-Wendepunkt vor.

Die in Aufgabenteil a) angegebenen kritischen Stellen sind also bestätigt, die exakten Werte gemäß der Funktion sind:

Anfangsumsatz: $f(-3) = 3 - 5 \cdot \exp(-3) \approx 2,751$; das entspricht 27510 Euro,

Umsatz beim Trendwendepunkt: $f(0) = 3 - 2 \cdot 1e = 1$; das entspricht 10000 Euro.

Umsatz beim Tiefpunkt: $f(1) = 3 - e \approx 0,282$; das entspricht 2820 Euro.

Umsatz am Ende des Beobachtungszeitraums: $f(2) = 3$; entspricht 30000 Euro.

- 1c) Werte der Exponentialfunktion lassen sich nicht elementar berechnen. Man sucht eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die über dem Intervall $[0; 2]$ als Ersatzfunktion dienen soll. Ihr Graph soll die y-Achse an der gleichen Stelle schneiden wie die Umsatzkurve und sie dort berühren, soll an der gleichen Stelle wie diese einen Tiefpunkt haben und den gleichen Endpunkt wie die Umsatzkurve haben.

Bestimmen Sie - ausgehend von der Gleichung $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ - die Koeffizienten a, b, c, d so, dass die Ersatzfunktion p die gewünschten Eigenschaften hat.

Hinweis: Eine Variante zum Aufgabenteil 1c ist im Anhang angegeben

Lösung: Einsetzen in die Funktionsgleichung von p und $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ liefert:

(1) Aus $p(0) = f(0) = 1$ erhält man $d = 1$,

(2) Wegen $p'(0) = f'(0) = -1$ gilt $c = -1$,

(3) Wegen $p'(1) = 0$ ergibt sich $3a + 2b + c = 0$,

(4) Aus $p(2) = f(2) = 3$ folgt $8a + 4b + 2c + 1 = 3$.

Einsetzen des Werts für c aus (2) in die unter (3), (4) gewonnenen Gleichungen ergibt das (2,2)-System

$$3a + 2b = 1, \quad 8a + 4b = 4$$

mit den Lösungen $a = 1, b = -1$;

Die gesuchten Koeffizienten sind also $a = 1, b = -1, c = -1, d = 1$.

Die Näherungskurve hat die Gleichung $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

1d) Ohne Nachweis darf nachfolgend bei der Lösung benutzt werden, dass die Ersatzfunktion p an keiner Stelle des Intervalls $[0; 2]$ größere Werte annimmt als die Umsatzfunktion f . Ein Maß für die Qualität der Näherung ist der Inhalt F des von beiden Graphen gemeinsam berandeten Flächenstücks.

d₁) Bestimmen Sie näherungsweise den Inhalt F der Abweichungsfläche, indem Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ berechnen, wobei A der Schnittpunkt der Kurven mit der x -Achse, C der gemeinsame Endpunkt und B und D die jeweiligen Tiefpunkte der Kurven sind.

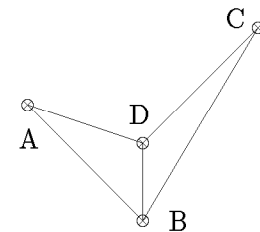
d₂) Stellen Sie einen Integralansatz für den Inhalt F auf und berechnen Sie diesen Inhalt exakt.

Lösung:

Zu d₁) Das Viereck $ABCD$ hat die Ecken $A(0|f(0)), B(1|p(1)), C(2|f(2)), D(1|f(1))$, also aufgrund der Ergebnisse von Aufgabenteil 1c) und wegen $p(1) = 0$ die folgenden Eckpunkte: $A(0|1), B(1|0), C(2|3), D(1|3-e)$.

Da das Viereck $ABCD$ sich aus den Dreiecken ABD und BDC mit der gemeinsamen Grundseite BD und jeweils Höhen der Länge 1 zusammensetzt, ergibt sich wegen $\overline{BD} = 3-e$ als Flächeninhalt V des Vierecks $ABCD$:

$$V = \frac{1}{2}(3-e) \cdot 1 + \frac{1}{2}(3-e) \cdot 1 = 3 - e \approx 0,282$$



Der Inhalt der Abweichungsfläche beträgt also ca. 0,282 Flächeneinheiten.

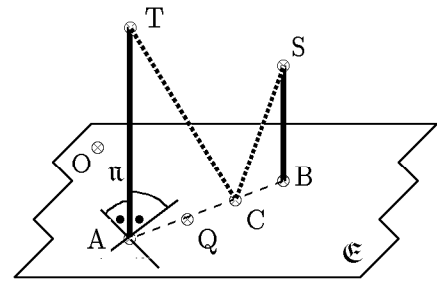
Zu d₂) Da $\text{Graph}(p)$ über dem Intervall nirgends oberhalb von $\text{Graph}(f)$ verläuft, ergibt sich der Inhalt F der Abweichungsfläche als Integral von $f-p$ über $[0; 2]$. Die Integralberechnung wird mit partieller Integration durchgeführt:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^2 (3 + (x-2) \cdot \exp(x) - (x^3 - x^2 - x + 1)) dx \\ &= \int_0^2 (2 - x^3 + x^2 + x) dx + \int_0^2 (x-2) \cdot \exp(x) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 + \left[(x-2) \cdot \exp(x) \right]_0^2 - \int_0^2 \exp(x) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + (x-3) \cdot \exp(x) \right]_0^2 \\ &= 4 - 4 + \frac{8}{3} + 2 - \exp(2) + 3 = \frac{23}{3} - e^2 \approx 0,278. \end{aligned}$$

Der genaue Inhalt der Abweichungsfläche beträgt somit $\frac{23}{3} - e^2$.

Zu Aufgabe 2

Ein Drahtseilartist baut für eine seiner Nummern ein Gerüst, bei dem zwei Türme mit den Sockelpunkten A und B und den Spitzen T und S senkrecht zur Basisebene \mathcal{E} aufgebaut werden. Zur Stabilisierung soll ein Punkt C der Strecke AB starr durch streckenförmige Stützen mit T und S verbunden werden. (Siehe Skizze rechts).



Ein räumliches Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Ursprung O in der Ebene \mathcal{E} liegt. Von den angegebenen

Punkten und einem weiteren Punkt Q der Ebene \mathcal{E} sind die folgenden Koordinaten bekannt:

$$T = (3 \mid 4 \mid 11), S = (11 \mid 15 \mid 11), A = (1 \mid 8 \mid 5), Q = (4 \mid 11 \mid 6), B = (10 \mid y_B \mid 8).$$

- 2a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Basisebene und ermitteln Sie damit die Koordinaten von B. Kontrolle: $\mathcal{E}: x - 2y + 3z = 0$.

Lösung: Da die Basisebene die Punkte O, A und Q enthält, sind die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{q} Richtungsvektoren der Ebene \mathcal{E} ; mit \mathbf{n} als einem Vielfachen von $\mathbf{a} \times \mathbf{q}$ erhält man einen Normalenvektor von \mathcal{E} .

$$\mathbf{a} \times \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 - 55 \\ 20 - 6 \\ 11 - 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -21 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Ursprungsebene \mathcal{E} mit dem angegebenen Normalenvektor \mathbf{n} hat die Gleichung $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$, - oder in Koordinatenschreibweise: $x - 2y + 3z = 0$.

Genau dann liegt B in der Ebene \mathcal{E} , wenn die Koordinaten von B die Ebenengleichung erfüllen, wenn also gilt: $10 - 2y_B + 3 \cdot 8z = 0$.

Auflösen dieser Gleichung nach y_B ergibt $y_B = 17$.

- 2b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Strecke AB an, zeigen Sie, dass Q (wie in der Skizze angedeutet) auf AB liegt und drücken Sie die Gesamtlänge w des Streckenzugs TCS durch einen Term mit einem Parameter aus.

Lösung: Die Strecke AB hat die Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ mit $r \in [0; 1]$.

Wegen $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (10 \mid 17 \mid 8)^T - (1 \mid 8 \mid 5)^T = (9 \mid 9 \mid 3)^T$ erhält man für AB die folgende Parameterdarstellung, die für $r = \frac{1}{3}$ ($r \in [0; 1]$!) den Vektor \mathbf{q} ergibt:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{q}.$$

Die Länge eines Pfeils wird als Norm jenes Vektors errechnet, den der Pfeil repräsentiert. Damit ergibt sich $w = \|\mathbf{c} - \mathbf{t}\| + \|\mathbf{s} - \mathbf{c}\|$.

Ist nun r speziell der Parameter in der Parameterdarstellung von AB, der zum Ortsvektor \mathbf{c} gehört, folgt weiter $w = \|\mathbf{a} + r(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{t}\| + \|\mathbf{s} - \mathbf{a} - r(\mathbf{b} - \mathbf{a})\|$
 $= \|\mathbf{a} - \mathbf{t} + r(\mathbf{b} - \mathbf{a})\| + \|\mathbf{s} - \mathbf{a} - r(\mathbf{b} - \mathbf{a})\|$.

$$\mathbf{a} - \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{s} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Damit ist } w = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|.$$

2c) Ermitteln Sie die Länge w für den Spezialfall $C = Q$.

Aus Gründen der Materialersparnis soll der Streckenzug TCS möglichst kurz sein.

Beschreiben Sie - ohne die Extremwertberechnung auszuführen - wie der im Sinne minimalen Materialverbrauchs günstigste Wert für den Punkt C mit Hilfe einer Zielfunktion f und Methoden der Analysis zu ermitteln ist.

Lösung: Nach b) ergibt sich der Ortsvektor q in der Pd. von AB für $r = \frac{1}{3}$. Damit ist

$$w = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-5)^2} + \sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{75} + \sqrt{90}.$$

Der Streckenzug TQS hat somit die Länge $5 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{10}$, also ca 18,15.

Die Funktion f mit der Gleichung $f(r) = \| \mathbf{a} - \mathbf{t} + r(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \| + \| \mathbf{j} - \mathbf{a} - r(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \|$ ist die Summe von zwei Wurzelfunktionen mit Polynomen zweiten Grades als Radikanden; nach den Ableitungsregeln für Wurzeln, Ketten- und Summenregel kann also $f'(r)$ berechnet werden. Der Wert von r aus dem Intervall $[0; 1]$, für den f' einen Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv hat (das geschieht an einer Nullstelle) liefert die gesuchte Stelle, für die $f(r)$, also w minimal wird.

2d) Die Spiegelung des Raums an der Ursprungsebene \mathfrak{E} mit dem Normalenvektor \mathbf{u} ist durch eine lineare Abbildung φ zu beschreiben. Im Unterricht wurde gezeigt, dass sich bei dieser Spiegelung für jeden Punkt P der Ortsvektor \mathbf{p}' seines Bildpunkts P' als $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - 2 \frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u}$ erhalten lässt.

Erläutern Sie den Aufbau der Matrix einer linearen Abbildung von \mathbb{R}^3 in sich und ermitteln Sie die zu der beschriebenen Spiegelung φ gehörende Matrix M.

Lösung: Die Spalten der Matrix einer linearen Abbildung sind die Komponenten der Bilder der Einheitsvektoren. Wegen $\mathbf{u} = (1 \mid -2 \mid 3)^T$ und $\mathbf{u} * \mathbf{u} = 14$ ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \frac{1}{7} (x - 2y + 3z) \mathbf{u}.$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad \text{Ergebnis: } M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2e) Errechnen Sie die Koordinaten des Bildpunkts T' und ermitteln Sie den Schnittpunkt D der Strecke ST' mit der Ebene \mathfrak{E} .

Lösung: Der Ortsvektor \mathbf{t}' lässt sich wahlweise als Bild $\varphi(\mathbf{t})$ bzw. $M \cdot \mathbf{t}$ oder elementarer als $\mathbf{t} + 2 \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{t})$, also als $2\mathbf{a} - \mathbf{t}$ errechnen. Mit dem letztgenannten Ansatz ergibt sich $\mathbf{t}' = 2 \cdot (1 \mid 8 \mid 5)^T - (3 \mid 4 \mid 11)^T = (-1 \mid 12 \mid -1)^T$; $T' = (-1 \mid 12 \mid -1)$.

Die Strecke ST' hat die Parameterdarstellung $\mathfrak{F} = \mathbf{j} + r(\mathbf{t}' - \mathbf{j})$ mit $0 \leq r \leq 1$.

X liegt in der Ebene \mathfrak{E} , wenn $\mathfrak{F} * \mathbf{u} = 0$ gilt, also $(\mathbf{j} + r(\mathbf{t}' - \mathbf{j})) * \mathbf{u} = 0$.

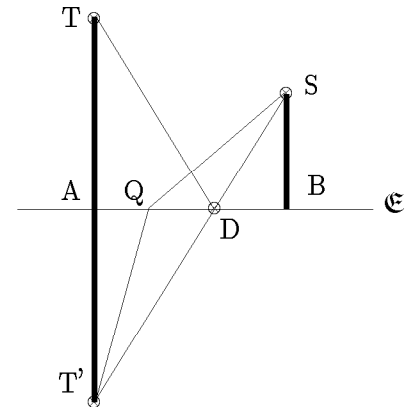
Auflösen nach r ergibt $r = -\frac{\mathbf{j} * \mathbf{u}}{(\mathbf{t}' - \mathbf{j}) * \mathbf{u}}$; also ist $\mathbf{d} = \mathbf{j} - \frac{\mathbf{j} * \mathbf{u}}{(\mathbf{t}' - \mathbf{j}) * \mathbf{u}} (\mathbf{t}' - \mathbf{j})$.

$$\begin{aligned}
\bar{d} &= \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{14}{\begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{14}{-42} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad \text{Ergebnis: } D = (7 | 14 | 7).
\end{aligned}$$

- 2f) Begründen Sie geometrisch anhand einer Skizze mit den Punkten A, B, T, T', S und D, warum für C = D der Streckenzug TCS kürzer ist als bei jeder anderen Wahl von C auf der Strecke AB.

Lösung: Die Punkte A, B, T, T', S und D - und mit A und B auch die gesamte Strecke AB liegen alle in der Ebene durch T, T' und S.

Der Streckenzug TCS hat aus Symmetriegründen ($\overline{TC} = \overline{T'C}$) die gleiche Länge wie der Streckenzug T'CS; dieser ist aber am kürzesten, wenn C auf der Strecke T'S liegt, weil die Strecke ST' die kürzeste Verbindung der Punkte S und T' ist.



Variante zum Aufgabenteil 1c)

Werte der Exponentialfunktion lassen sich nicht elementar berechnen. Man sucht eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die über dem Intervall $[0; 2]$ als Ersatzfunktion dienen soll. Ihr Graph soll die y-Achse an der gleichen Stelle schneiden wie die Umsatzkurve, soll an der gleichen Stelle wie diese einen Tiefpunkt haben und die Umsatzkurve im Endpunkt berühren. Bestimmen Sie - ausgehend von der Gleichung $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ - die Koeffizienten a, b, c, d so, dass die Ersatzfunktion p die gewünschten Eigenschaften hat.

Lösung: Einsetzen in die Funktionsgleichung von p und $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ liefert:

(1) Aus $p(0) = f(0) = 1$ erhält man $d = 1$,

(2) Wegen $p'(1) = f'(1) = 0$ gilt

$$3a + 2b + c = 0,$$

(3) Wegen $p'(2) = f'(2)$ ergibt sich

$$12a + 4b + c = e^2,$$

(4) Aus $p(2) = f(2) = 3$ folgt

$$8a + 4b + 2c + 1 = 3, \text{ also } 4a + 2b + c = 1.$$

Aus den Gleichungen (2) und (4) ergibt sich $2a = 2$, also $a = 1$.

Einsetzen des Werts für a in die unter (3), (4) gewonnenen Gleichungen ergibt das (2,2)-System

$$2b + c = -3, \quad 4b + c = e^2 - 12$$

mit den Lösungen $b = \frac{1}{2}(e^2 - 9)$, $c = 6 - e^2$;

Die gesuchten Koeffizienten sind also $a = 1$, $b = \frac{1}{2}(e^2 - 9)$, $c = 6 - e^2$, $d = 1$.

Die Näherungskurve hat die Gleichung $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}(e^2 - 9)x^2 + (6 - e^2)x + 1$.