Aufgabe 1

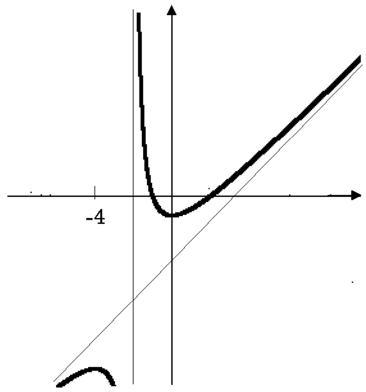
Die rationale Funktion f hat die Gleichung $f(x) = \frac{4(x-2)(x+1)}{x+2}$.

1a) Ermitteln Sie Vorzeichen- und Monotonieverhalten der Kurve sowie das asymptotische Verhalten für betraglich große x-Werte und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung: Die Funktion hat bei -2 eine Definitionslücke, da dort der Nenner des Funktionsterms den Wert 0 annehmen würde. Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Zählers, also -1 und 2. Es gibt also keinen Vorzeichenwechsel innerhalb der Intervalle $]-\infty; -2[$, $]-2; -1[$, $]-1; 2[$ und $]2; \infty[$. Da die Nullstellen von Zähler und Nenner einfach sind, erfolgt jeweils an den Nullstellen der Funktion und an der Definitionslücke ein Vorzeichenwechsel.
Aus $f(0) = -8$ schließt man daher, dass der Graph über $]-\infty; -2[\cup]-1; 2[$ unterhalb und über $]-2; 1[\cup]2; \infty[$ oberhalb der x-Achse verläuft.

Mit Hilfe der Quotientenregel ergibt sich aus $f(x) = 4\,\frac{x^2-x-2}{x+2}$ die Ableitung
$f'(x) = 4 \cdot \frac{(x+2)(2x-1)-(x^2-x-2)}{(x+2)^2} = 4 \cdot \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ mit den Nullstellen -4 und 0 .
Da der Faktor $\frac{4}{(x+2)^2}$ überall positiv ist, bestimmt allein der Term $x^2 + 4x$ das Vorzeichen der Ableitung, die somit über $]-4; 0[$ negativ und über $\mathbb{R} \setminus [-4; 0]$ positiv ist.

Der Graph steigt also bis zur Stelle -4 und fällt dann wieder, hat bei -2 einen Pol mit Vorzeichenwechsel von minus nach plus, fällt dann weiter bis zur Stelle 0 und steigt dann wieder.



Durch Polynomdivision formt man den Funktionsterm um zu erhält man $f(x) = 4x - 12 + \frac{16}{x+2}$, die Gerade mit der Gleichung $y = 4x - 12$ ist also schiefe Asymptote des Graphen.

1b) Die Parabel mit der Gleichung $p(x) = (x-2)(x+1)(c-x)$ verläuft offensichtlich durch die Nullpunkte des Graphen von f. Wie ist der Wert c zu wählen, damit die Parabel den Graphen in seinem linken Nullpunkt berührt.

Weisen Sie nach, dass die ermittelte Parabel den Graphen von f auch in seinem rechten Nullpunkt berührt.

Lösung: Wegen $p(x) = -x^3 + (c+1)x^2 + (2-c)x - 2c$ erhält man als Ableitung

$p'(x) = -3x^2 + 2(c+1)x + 2-c$; $p'(-1) = -3 - 2(c+1) + 2-c = -3 - 3c$.

$f'(-1) = 4 \cdot \frac{1-4}{(1)^2} = -12$; das ist genau dann $-3 - 3c$, wenn $c = 3$ gilt.

Mit $c = 3$ ist $p'(x) = -3x^2 + 2(3+1)x + 2 - 3 = -3x^2 + 8x - 1$.

In seinem rechten Nullpunkt hat Graph(f) die Steigung $f'(2) = 4 \cdot \frac{4+8}{4^2} = 3$;

wegen $p'(2) = -3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 3$ haben die beiden Graphen, wie zu zeigen war, im rechten Nullpunkt des Graphen von f die gleiche Steigung.

1c) Nach den Ergebnissen der Aufgabenteile a) und b) kann p über dem Intervall zwischen den Nullstellen von f als ganzrationale Näherungsfunktion für f verwendet werden. Begründen Sie, dass im Intervall zwischen den Nullstellen des Graphen von f die Parabel an keiner Stelle oberhalb des Graphen von f verläuft.

Lösung: Die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = f(x) - g(x)$ ist über $[-1; 2]$ stetig.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{4(x-2)(x+1)}{x+2} - (x-2)(x+1)(3-x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\big(4 - (x+2)(3-x)\big) \\ &= \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}(x^2 - x - 2) = \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}(x-2)(x+1)\ ; \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Intervall $]-1; 2[$ positiv, da er durch Multiplikation von $\frac{1}{x+2}$ mit einem quadratischen Ausdruck entsteht.

(Alternativ: Einzige Nullstellen von h sind –1 und 2).

1d) Berechnen Sie den mittleren absoluten Fehler für p als Näherungsfunktion zu f.

Lösung: Wegen $c = 3$ (nach Aufgabenteil b)) ist $p(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$.

Da das Intervall $[-1; 2]$ die Länge 3 hat, errechnet sich der gesuchte Fehler d als dritter Teil des Integrals von $f - p$ über dem Intervall $[-1; 2]$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\Big(4x - 12 + \frac{16}{x+2} - (-x^3 + 4x^2 - x - 6)\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big(\int_{-1}^{2}\frac{16}{x+2}\,dx + \int_{-1}^{2}(x^3 - 4x^2 + 5x - 6)\,dx\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big[16\ln(x+2) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x\Big]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{3}\Big(\big(16\ln(4) + 4 - \frac{32}{3} + 10 - 12\big) - \big(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + 6\big)\Big) \\ &= \frac{16}{3}\ln(4) - \frac{25}{4} \approx 1{,}14\ . \end{aligned}$$

Der mittlere absolute Fehler der (offenbar wenig brauchbaren) Näherungsfunktion beträgt ca. 1,14 .

Aufgabe 2

Ein Museum plant für seine ägyptische Abteilung ein digitales Modell der Cheopspyramide mit der Grundseite ABCD und der Spitze S. Die rechnerinternen Koordinaten der Punkte sind $A(-10 \mid 10 \mid 0)$, $B(0 \mid 30 \mid 20)$, $C(20 \mid 10 \mid 30)$, $S(17 \mid 16 \mid 3)$.
Die Pläne sollen überprüft werden.

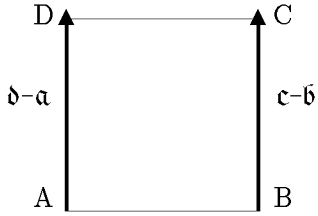
2a) Zeigen Sie, dass A, B, C drei Ecken eines Quadrats ABCD sind und bestimmen Sie die Koordinaten der vierten Grundseitenecke D.

Lösung: Zur Lösung des ersten Teils der Aufgabe ist zu zeigen, das das Dreieck ABC gleichschenklig rechtwinklig mit rechtem Winkel an der Ecke B ist. Vektoriell ist dies äquivalent dazu, dass $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\|$ und $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) * (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = 0$ gilt:

$$\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| = \left\|\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\30\\20\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-10\\-20\\-20\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{100+400+400} = 30$$

$$\|\mathfrak{c}-\mathfrak{b}\| = \left\|\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\30\\20\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix}\right\| = 30;\ \text{also ist } \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{c}-\mathfrak{b}\|.$$

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})*(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) = \begin{pmatrix}-10\\-20\\-20\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix} = -200+400-200 = 0\,.$$



Da ABCD ein Parallelogramm ist, gilt $\mathfrak{d}-\mathfrak{a} = \mathfrak{c}-\mathfrak{b}$, also $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$. Daher erhält man:
D $= (-10+20-0 \mid 10+10-30 \mid 0+30-20)$
$= (10 \mid -10 \mid 10)$.

2b) Man hat festgestellt, dass der Umfang der Grundfläche annährend mit dem Umfang des Kreises um die Spitze S übereinstimmt, dessen Radius die Höhe h der Pyramide ist. Überprüfen Sie, ob diese Aussage für das Modell zutrifft.

Lösung: Da Viereck ABCD ein Quadrat ist, errechnet sich der Umfang u als $4\cdot\overline{AB}$: $u = 4\cdot\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| = 4\cdot 30 = 120$.

Die Grundfläche liegt in der Ebene $\mathfrak{E}$ durch A, B, C, als deren Normalenvektor $\mathfrak{n}$ ein beliebiges (von $\mathfrak{o}$ verschiedenes) Vielfaches von $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$ geeignet ist.

Wenn $\mathfrak{n}$ normiert ist, errechnet sich die Höhe h der Pyramide als Abstand der Pyramidenspitze S von der Ebene $\mathfrak{E}$, also als $\left|(\mathfrak{s}-\mathfrak{a})*\mathfrak{n}\right|$.

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) = \begin{pmatrix}-10\\-20\\-20\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-600\\-300\\300\end{pmatrix} = -300\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.\ \text{Wegen } \mathfrak{s}-\mathfrak{a} = \begin{pmatrix}17\\16\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\6\\3\end{pmatrix} \text{folgt}$$

$$h = \left|\begin{pmatrix}27\\6\\3\end{pmatrix}*\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}(54+6-6) = 18\,.$$

Ein Kreis mit Radius 18 hat den Umfang $2\cdot 18\cdot\pi$, also ca. 113,1 .

Die Aussage stimmt also nur bei sehr grober Rechnung, da der Kreisumfang ungefähr 6% kleiner ist als der Umfang der Grundfläche.

2c) Zu einer Grabkammer, die im Modell beim Punkte G(1 | 13 | 8) liegt, soll von einem Punkt P der Fläche ABS aus ein Schacht gebohrt werden. Bestimmen Sie den Punkt P, für den der Schacht am kürzesten ist.

Lösung: Die (nachfolgend mit $\mathfrak{F}$ bezeichnete) Ebene durch A, B, S hat die Gleichung $(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})*\mathfrak{f} = 0$, wobei $\mathfrak{f}$ ein Normalenvektor von $\mathfrak{F}$ ist. Der gesuchte Punkt P ergibt sich dann als Schnittpunkt von $\mathfrak{F}$ mit der Geraden durch G mit Richtungsvektor $\mathfrak{f}$, also der Geraden mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{g} + r\cdot\mathfrak{f}$.

Durch Einsetzen erhält man $(\mathfrak{g} + r\cdot\mathfrak{f} - \mathfrak{a})*\mathfrak{f} = 0$, also $r = \frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{g})*\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}*\mathfrak{f}}$;

Somit ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{g})*\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}*\mathfrak{f}}\ \mathfrak{f}$. Ausführen der Rechnung ergibt:

$$(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix}10\\20\\20\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}27\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-60\\510\\-480\end{pmatrix} =-30\begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix};\ \mathfrak{f} = \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}.$$

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}$$

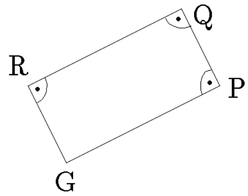
$$= \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}}{4+289+256} \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} + \frac{-99}{549} \begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} - \frac{11}{61}\begin{pmatrix}2\\-17\\16\end{pmatrix} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix}39\\980\\312\end{pmatrix};\ P = \left(\frac{39}{61}\Big|\frac{980}{61}\Big|\frac{312}{61}\right) \approx (0{,}64|16{,}07\ |\ 5{,}12).$$

2d) Im Modell wird die Bohrung des Schachts zur Grabkammer beim Punkte Q(1 | 16 | 5) angesetzt. Die senkrecht zur Fläche ABS verlaufende Bohrung geht an der Grabkammer vorbei. Zeigen Sie, dass der Abstand von G zum Bohrschacht kleiner als 0,5 ist.

Lösungstipp: Bezeichnen Sie den G am nächsten liegenden Punkt des Bohrschachts mit R und betrachten Sie das Viereck GPQR.

Lösung: Da die Strecke PQ in der Ebene $\mathfrak{F}$ liegt und die Bohrung senkrecht zu $\mathfrak{F}$ erfolgt, ist das Viereck GPQR ein Rechteck. Daher gibt neben RG auch PQ den betrachteten Abstand an.



$$\mathfrak{q} - \mathfrak{p} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix}61\cdot 1 - 39\\61\cdot 16 - 980\\61\cdot 5 - 312\end{pmatrix} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix}22\\-4\\-7\end{pmatrix};\ \|\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\| = \frac{1}{61}\sqrt{549} = 0{,}384... < 0{,}5.$$

Der Bohrschacht verläuft im Modell also näher als im Abstand 0,5 zur Grabkammer.

Bemerkung: Wenn die Bestimmung von P in Aufgabenteil c nicht gelungen ist, kann der verlangte Nachweis geführt werden, indem die Parameterdarstellung der Geraden durch G mit dem Normalenvektor der Ebene ABS aufgestellt wird und dann der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden bestimmt wird (Grundaufgabe: Abstand eines Punktes von einer Geraden).

2e) Die Pyramiden sollten über Jahrtausende Bestand haben. Hierbei war es für die Stabilität wichtig, dass der Böschungswinkel, hier also der Winkel zwischen der Grundfläche und der Fläche ABS nicht größer als 52° war.
Entscheiden Sie, ob das Modell in diesem Sinne stabil ist.

Lösung: Der betrachtete Böschungswinkel ist der Winkel zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, also zwischen ihren Normalenvektoren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$. Bezeichnet man einen der Winkel zwischen den Ebenen α, so gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathfrak{n} * \mathfrak{f}}{\|\mathfrak{n}\| \cdot \|\mathfrak{f}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 16 \end{pmatrix}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{549}} = \frac{-45}{9\sqrt{61}} = \cos(129{,}8\ldots^\circ).$$

Wegen $180^\circ - 129{,}8\ldots^\circ = 50{,}\ldots^\circ < 52^\circ$ ist das Modell stabil im angegebenen Sinn.

Aufgabe 3

Für die reelle Zahl p wird das Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & py & + & 2z & = & 4 \\ px & + & 9y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right\}$ betrachtet.

3a) Bestimmen Sie die Menge P aller Parameter p, für die das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, und berechnen Sie unter Verwendung der Cramerschen Regel speziell für $p = -3$ die dritte Komponente des Lösungsvektors.

Lösung: Genau dann hat ein lineares (n,n)-Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, wenn der Wert der Systemdeterminante verschieden von null ist.

$$\begin{vmatrix} 6 & p & 2 \\ p & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - p(p-2) + 2(p-18) = -p^2 + 4p + 12 = (6-p)(p+2).$$

Die Nullstellen von $(6-p)(p+2)$ sind -2 und 6; somit ist $P = \mathbb{R} \setminus \{-2;\ 6\}$.

Für den speziellen Fall $p = -3$ hat die Determinante D des Gleichungssystems den Wert $D = (6+3)(-3+2) = -9$.

Für die dritte Komponente z des Lösungsvektors ergibt sich nach dann:

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ -3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot (-99) = 11.$$

3b) Ermitteln Sie für jeden der nicht in P liegenden Werte von p die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems.

Lösung: Die für die Werte $p = -2$ und $p = 6$ entstehenden linearen Gleichungssysteme werden durch elementare Zeilenumformungen der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrizen gelöst:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 9 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ geht über in } \begin{pmatrix} 25 & 0 & 10 & 23 \\ 0 & 25 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{; es gibt also keine Lösungen.}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ geht über in } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{; eine spezielle Lösung ist also } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen Vektoren der Form $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$.

3c) Deuten Sie die drei Gleichungen des Systems als Beschreibungen von Punktmengen im Raum und interpretieren Sie die in a) und b) untersuchten Fälle geometrisch.

Lösung: Eine Gleichung der Form $ax + by + cz = d$ $\big(\text{mit } (a|b|c) \neq (0|0|0)\big)$ beschreibt eine Ebene im dreidimensionalen Raum. Dabei sind die Koeffizienten der Variablen die Komponenten des jeweiligen Normalenvektors der Ebene. Im vorgelegten Fall sind diese Normalenvektoren offensichtlich paarweise linear unabhängig, so dass sich je zwei der Ebenen in einer Geraden schneiden.

Im Falle $p \in P$ verläuft die Schnittgerade der ersten beiden Ebenen nicht orthogonal zum Normalenvektor der dritten Ebene, so dass es genau einen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen gibt.

Im Falle $p \notin P$ verläuft die Schnittgerade der ersten beiden Ebenen parallel zur dritten Ebene, und zwar im Falle $p = -2$ außerhalb, so dass es keine gemeinsamen Punkte gibt, und im Fall $p = 6$ in der dritten Ebene, so dass alle Punkte der betrachteten Schnittgeraden die Lösungsmenge bilden.

3d) Erklären Sie die Begriffe *Kern* und *Bild* einer linearen Abbildung und geben Sie für die Abbildung φ_p, die zu der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems gehört, für jeden der betrachteten Fälle von p Bild(φ_p) und Kerns(φ_p) an .

Lösung: Der Kern einer linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ist die Menge der Urbilder des Nullvektors. Das Bild ist die Menge aller Vektoren des Zielraums, die ein Urbild haben.

Für $p \in P$ ist die lineare Abbildung φ_p bijektiv; somit ist Bild(φ_p) $= \mathbb{R}^3$ (da die Abbildung surjektiv ist) und Kern(φ_p) $= \{\mathfrak{o}\}$ (da die Abbildung injektiv ist).

Für $p \notin P$ wird der Bildraum von jeweils zwei der drei (paarweise linear unabhängigen) Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix aufgespannt; somit ergibt sich Bild (φ_p) für $p \in \{-2; 6\}$ z.B. als lineare Hülle von $\{ (6|p|2)^T, (2|1|1)^T \}$.

Der Kern von φ_p ergibt sich als Lösungsmenge des jeweils zugehörigen homogenen Gleichungssystems; aus den bei der Umformung erhaltenen Matrizen liest man ab:

Kern(φ_{-2}) $= \langle\, (10 \mid 5 \mid -25)^T \,\rangle$, Kern($\varphi_6$) $= \langle\, (2 \mid -1 \mid -3)^T \,\rangle$.