Gymnasium Leichlingen

2006 12m$_3$ Lö 2004/2005.2 2/2 Aufgaben/Lösungen zur Klausur Nr. 4 von 2005-05-23

3*45'

A 1: An den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2$ wird im Punkte $A\left(-2 \,\middle|\, f(-2)\right)$ die Tangente t angelegt. Die Gerade t schneidet den Graphen von f in einem weiteren Punkt B.

a) Gib die Gleichung von t an und bestimme die Koordinaten des Punktes B.

b) Entscheide - mit Begründung -, ob über dem Intervall zwischen x_A und x_B die Tangente oberhalb oder unterhalb des Graphen von f verläuft.

c) Bestimme mit Hilfe der Integralrechnung den Inhalt I der von Kurve und Tangente gemeinsam berandeten Fläche.

Lösung:

a) Ableiten von f ergibt: $f'(x) = 3x^2 + 4x$.
Aus $f(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 = 0$ und $f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) = 4$ liefert die allgemeine Tangentengleichung $\left(y = f(-2) + f'(-2)\cdot(x+2)\right)$:
Die Tangente t hat die Gleichung $g(x) = 4\cdot(x + 2)$.
Für die x-Koordinate des gesuchten Schnittpunktes B gilt: $f(x) = g(x)$, also
$x^3 + 2x^2 = 4\cdot(x + 2)$; das ist äquivalent zu $(x^2 - 4)(x + 2) = 0$.
Die Lösungen dieser Gleichung sind -2 (also die bereits aufgrund der Aufgabenstellung bekannte Schnittstelle) und 2.
Wegen $f(2) = 2^3 + 2\cdot2^2 = 16$ ergibt sich: $B = (2 | 16)$.

b) Da die Funktion $f - g$ nach a) nur die Nullstellen -2 und 2 hat, gibt es innerhalb des Intervalls zwischen x_A und x_B, also im Intervall $]-2; 2[$ keine Nullstelle von $f - g$; wegen $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0 - 8 = -8 < 0$ ist $f - g$ in diesem Intervall negativ; der Graph von f verläuft also unterhalb der Tangente.

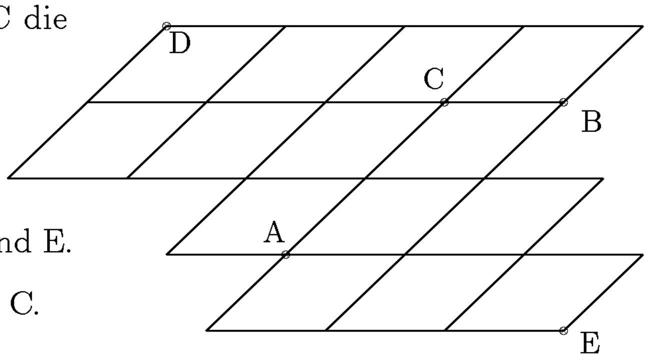
c) Aufgrund des in b) festgestellten Verlaufs ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt I als Integral von $g - f$ in den Grenzen von -2 bis 2:

$$I = \int_{-2}^{2}(g-f)(x)dx = \int_{-2}^{2}(4x + 8 - x^3 - 2x^2)dx = \int_{-2}^{2}(4x - x^3)dx + \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)dx$$

$$= 0 + 2\cdot\left[8x - \tfrac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 2\cdot\left(16 - \tfrac{2}{3}\cdot 2^3\right) = \tfrac{64}{3} .$$

Man erhält: $I = \frac{64}{3}$; der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $\frac{64}{3}$ FE.

A 2: Ein ebenes Muster besteht aus aneinandergesetzten Parallelogrammen. Dabei haben die Punkte A, B und C die folgenden Koordinaten:
$A = (2 | -3 | 1)$,
$B = (0 | 1 | -1)$,
$C = (-6 | 3 | 3)$.



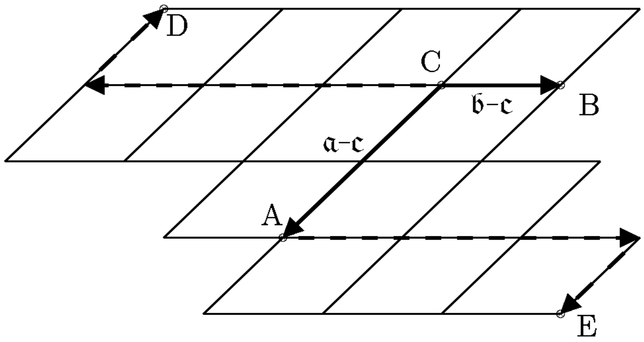
a) Bestimme die Koordinaten von D und E.

b) Berechne die Entfernung von A und C.

c)* Entscheide, ob sich die Gerade durch O und C mit der Geraden durch A und B schneidet, und berechne ggf. den Schnittpunkt.

Lösung:

a) Aus der Skizze liest man ab:



$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c} + 3(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \tfrac{9}{2}\mathfrak{c} - 3\mathfrak{b} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{a} - 6\mathfrak{b} + 9\mathfrak{c})$$

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + 3(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = \tfrac{3}{2}\mathfrak{a} + 3\mathfrak{b} - \tfrac{7}{2}\mathfrak{c} = \tfrac{1}{2}(3\mathfrak{a} + 6\mathfrak{b} - 7\mathfrak{c})$$

Einsetzen der Komponenten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ergibt

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\left(-\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}-6\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-0-54\\3-6+27\\-1+6+27\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-56\\24\\32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28\\12\\16\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{e} = \frac{1}{2}\left(3\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}-6\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6+0+42\\-9+6-21\\3-6-21\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}48\\-24\\-24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\-12\\-12\end{pmatrix}.$$

Die gesuchten Koordinaten sind D = (− 28 | 12 | 16), E = (24 | − 12 | − 12).

b) Die Entfernung von A und C berechnet sich als Norm von $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$.

$$\|\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\| = \left\|\begin{pmatrix}-6\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-8\\6\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{64+36+4} = \sqrt{104}.$$

Die gesuchte Entfernung beträgt also $\sqrt{104}$ ($\approx 10{,}198$).

c) Die Gerade durch O und C wird mit g, die Gerade durch A und B wird mit h bezeichnet. Die Geraden haben die folgenden Parameterdarstellungen:

$$g\colon \mathfrak{x} = r\,\mathfrak{c} \qquad\qquad h\colon \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\,.$$

Genau dann haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt, wenn es Parameter r und s gibt, für welche beide Parameterdarstellungen den gleichen Vektor ergeben. Durch Gleichsetzen erhält man:

$$r\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}), \text{ also } r\,\mathfrak{c} + s(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,.$$

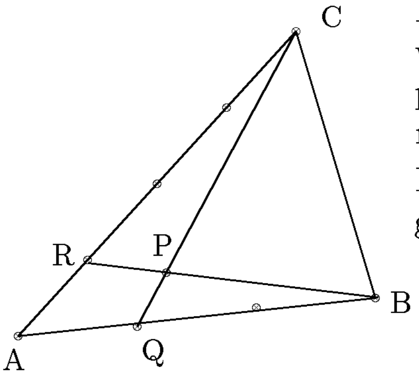
Die Gleichung $r\begin{pmatrix}-6\\3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ist äquivalent zu $\begin{aligned}-6r + 2s &= 2,\\ 3r - 4s &= -3,\\ 3r + 2s &= 1\,.\end{aligned}$

Als Lösungen des Gleichungssystems erhält man $r = -\frac{1}{9}$, $s = \frac{2}{3}$.

Der Schnittpunkt P hat also den Ortsvektor $\mathfrak{p} = -\frac{1}{9}\mathfrak{c} = -\frac{1}{9}(-6 \mid 3 \mid 3)^T$.

Ergebnis: Der Schnittpunkt ist $P\left(\frac{2}{3} \mid -\frac{1}{3} \mid -\frac{1}{3}\right)$.

A 3: Die Seiten AB und AC eines Dreiecks sind in drei bzw vier Teilstrecken gleicher Länge eingeteilt. Die Teilungspunkte Q und R sind wie in der Skizze dargestellt gewählt. Der Schnittpunkt der Strecken CQ und BR wird mit P bezeichnet.



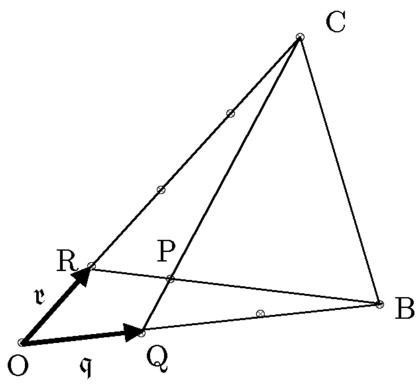
Bestimme das Teilungsverhältnis $\mu = \frac{\text{BP}}{\text{BR}}$ auf folgende Weise:

a) Lege den Ursprung O in den Punkt A und drücke die Ortsvektoren von Q und R mit Hilfe der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aus.

b) Stelle den Ortsvektor $\mathfrak{p}$ von P dar, indem du einmal verwendest, dass P auf AR liegt, dann dass P auf CQ liegt, und gib in beiden Fällen eine Darstellung von $\mathfrak{p}$ an, in der nur die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ verwendet werden.

c) Setze die Darstellungen von $\mathfrak{p}$ gleich und bestimme damit das gesuchte Teilverhältnis μ .

Lösung:



a) $\mathfrak{q} = \frac{1}{3}\,\mathfrak{b}$; $\qquad \mathfrak{r} = \frac{1}{4}\,\mathfrak{c}$.

b) P liegt auf BR: $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + \mathrm{r}(\mathfrak{r} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} + \mathrm{r}(\frac{1}{4}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$.
P liegt auf CQ: $\mathfrak{p} = \mathfrak{c} + \mathrm{s}(\mathfrak{q} - \mathfrak{c}) = \mathfrak{c} + \mathrm{s}(\frac{1}{3}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$.

c) Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von $\mathfrak{p}$ ergibt $\quad \mathfrak{b} + \mathrm{r}(\frac{1}{4}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} + \mathrm{s}(\frac{1}{3}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$.
Durch Ordnen nach $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ erhält man

$$(1 - \mathrm{r} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{s})\,\mathfrak{b} = (1 - \mathrm{s} - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{r})\,\mathfrak{c}\,.$$

Da das Dreieck nicht zu einer Strecke ausgeartet ist, sind die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear unabhängig; die Koeffizienten auf den beiden Seiten der Gleichung müssen daher den Wert null haben. Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\mathrm{r} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{s} = 1 \qquad\qquad \tfrac{1}{4}\,\mathrm{r} + \mathrm{s} = 1\,.$$

Als Lösungen erhält man $\mathrm{r} = \frac{8}{11}$, $\mathrm{s} = \frac{9}{11}$.
Wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + \mathrm{r}(\mathfrak{r} - \mathfrak{b})$ gibt r das gesuchte Teilungsverhältnis an.

Ergebnis: Das gesuchte Teilungsverhältnis μ beträgt $\frac{8}{11}$.