

- A 1:** a) Gegeben sind  $n$  Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  und ein Punkt  $P$ . Die Pfeile von  $P$  zu  $A_1$ , von  $P$  zu  $A_2$ , von  $P$  zu  $A_3$ , ..., von  $P$  zu  $A_n$  repräsentieren  $n$  Vektoren.  $P$  heißt Schwerpunkt von  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , wenn sich als Summe dieser  $n$  Vektoren der Nullvektor ergibt.

Zeige, dass genau dann  $P$  der Schwerpunkt von  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ist, wenn  $P$  den Ortsvektor  $\frac{1}{n}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_n)$  hat.

- b) Beweise, dass in jedem Dreieck  $ABC$  der Schwerpunkt  $P$  von  $A, B, C$  auf der Seitenhalbierenden durch  $B$  liegt.  
 c) In einem Dreieck  $ABC$  sei  $P$  Schwerpunkt;  $M$  sei Mittelpunkt der Seite  $AC$ . Bestimme das Teilungsverhältnis  $\frac{BP}{BM}$ .  
 d) In einem Tetraeder  $ABCD$  wird die Strecke von  $D$  zum Schwerpunkt  $P$  des Dreiecks  $ABC$  gezogen.

Entscheide, ob der Schwerpunkt  $Q$  des Tetraeders auf  $DP$  liegt; bestimme ggf. das Teilungsverhältnis  $\frac{DQ}{DP}$ .

- L 1:** a) Der Pfeil von  $P$  zu  $A_i$  repräsentiert den Vektor  $\mathbf{a}_i - \mathbf{p}$ . Die Behauptung der Teilaufgabe ergibt sich aus den folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{p}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \Leftrightarrow n\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \Leftrightarrow \mathbf{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$$

Die letzte in dieser Kette äquivalenter Aussagen bedeutet, dass  $P$  Schwerpunkt von  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ist.

- 1b) Der Schwerpunkt  $P$  im Dreieck  $ABC$  hat nach a) den Ortsvektor  $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ . Die betrachtete Seitenhalbierende geht durch  $B$  und den Mittelpunkt  $M$  von  $AC$ . Sie hat daher die Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{m} - \mathbf{b})$ . Wegen  $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$  genügt es zum Beweis daher zu zeigen, dass für einen geeigneten Parameter  $r$  die Gleichung  $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} + r(\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \mathbf{b})$  richtig ist.

Auflösen der Klammern und Ordnen nach  $a, b, c$  ergibt die äquivalente Gleichung  $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}r) \mathbf{a} + (\frac{1}{3} - 1 + r) \mathbf{b} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}r) \mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Diese Gleichung ist für  $r = \frac{2}{3}$  offensichtlich erfüllt. Also liegt  $P$  auf der Seitenhalbierenden durch  $B$  und den Mittelpunkt von  $AC$ .

- 1c) In Aufgabenteil b) ergab sich  $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \frac{2}{3}(\mathbf{m} - \mathbf{b})$ ; daraus folgt  $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{3}$ .

- 1d) Der Schwerpunkt des Tetraeders hat den Ortsvektor  $\mathbf{q} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ ; es ist zu prüfen, ob  $Q$  auf der Strecke  $DP$  mit  $\mathbf{p} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$  liegt. Dies kann analog zu Aufgabenteil b) erfolgen; stattdessen kann man aber auch verwenden, dass  $Q$  genau dann auf  $DP$  liegt, wenn die Vektoren  $\mathbf{q} - \mathbf{d}$  und  $\mathbf{p} - \mathbf{d}$  linear abhängig sind.

$$\mathbf{q} - \mathbf{d} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - \mathbf{d} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{d} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{d} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{d}).$$

Offensichtlich gilt  $\mathbf{p} - \mathbf{d} = \frac{3}{4}(\mathbf{q} - \mathbf{d})$ ;  $Q$  liegt also auf der Strecke  $PD$  und das Teilungsverhältnis  $\frac{DQ}{DP}$  hat den Wert  $\frac{3}{4}$ .

- A 2:** Im Raum sind die folgenden Punkte A, B, C, D durch ihre Koordinaten gegeben:  
 $A = (5 \mid -1 \mid 1)$ ,  $B = (1 \mid 1 \mid 5)$ ,  $C = (-3 \mid 2 \mid 8)$ ,  $D = (2 \mid 2 \mid 1)$ .
- a) Zeige, dass die Punkte A, B, C nicht kollinear sind, und gib eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene  $\mathfrak{E}$  durch A, B, C an.
- b) Entscheide, ob O und D auf der gleichen Seite von  $\mathfrak{E}$  liegen, und bestimme die Menge L aller gemeinsamen Punkte der Geraden g durch O und D mit  $\mathfrak{E}$ .
- c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und das Volumen des Tetraeders mit den Ecken A, B, C, D.
- d)  $\mathfrak{F}$  sei die Ebene durch die Punkte O, D, A.  
Bestimme den Winkel  $\alpha$  zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ .
- e) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden s von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ .
- f\*) Leite unter Verwendung der Flächeninhaltsformel (mit Kreuzprodukt) für ein beliebiges Dreieck ABC eine skalarproduktfreie Formel für den Abstand eines Punktes C von der Geraden durch zwei Punkte A und B her.
- L 2:** a) Genau dann sind A, B, C kollinear, wenn das Kreuzprodukt  $(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})$  den Nullvektor ergibt.

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 12 \\ -32 + 28 \\ -12 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{o}.$$

Die Punkte A, B, C sind also nicht kollinear.

Die Ebene  $\mathfrak{E}$  durch A, B, C hat die Parameterdarstellung  $\mathfrak{r} = \mathbf{a} + r(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + s(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ ;

$$\mathfrak{E}: \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Das oben berechnete Kreuzprodukt  $(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})$  gibt die Richtung des Normalenvektors an.  $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})$  ist also ein geeigneter Normalenvektor von  $\mathfrak{E}$ . Mit diesem Normalenvektor und dem Aufpunkt A ergibt sich als Koordinatengleichung der Ebene  $\mathfrak{E}$  in vektorieller Schreibweise:  $\mathfrak{r} * \mathbf{n} - \mathbf{a} * \mathbf{n} = 0$ ;

$$\text{wegen } \mathbf{a} * \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 + 2 + 2 = 9 \text{ erhält man als Ergebnis:}$$

$\mathfrak{E}$  hat die Koordinatengleichung:  $x - 2y + 2z - 9 = 0$ .

- 2b) Genau dann liegen O und D auf der gleichen Seite von  $\mathfrak{E}$ , wenn sich beim Einsetzen der Koordinaten von O und von D in die linke Seite der Koordinatengleichung der Ebene die beiden Ergebnisse gleiche Vorzeichen haben.

$$\text{Einsetzen der Koordinaten von D: } 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 9 = -9;$$

Einsetzen der Koordinaten des Ursprungs ergibt offensichtlich auch  $-9$ .

Die Punkte O und D liegen also auf der gleichen Seite von  $\mathfrak{E}$ ; da sich in beiden Fällen der gleiche Wert ergibt, haben sie zusätzlich den gleichen Abstand von der Ebene, so dass g parallel zu  $\mathfrak{E}$  - und zwar außerhalb der Ebene - verläuft. Es gibt daher keine gemeinsamen Punkte von g und  $\mathfrak{E}$ : Die gesuchte Menge L ist  $\emptyset$ .

- 2c) Der gesuchte Flächeninhalt wird nachfolgend mit  $F$ , das gesuchte Volumen wird mit  $V$  bezeichnet. Weiterhin sei  $h$  die zur Grundseite  $ABC$  gehörende Höhe im Tetraeder, also der Abstand vom Punkt  $D$  zur Ebene  $\mathfrak{E}$ . Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) hat man:

$$F = \frac{1}{2} \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| = \frac{1}{2} \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 \cdot 1 + (-2)(-2) + 2 \cdot 2} = 3.$$

$$V = \frac{1}{3} F \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot d(D, \mathfrak{E}) = d(D, \mathfrak{E}).$$

Wegen  $\|\mathbf{u}\| = 3$  erhält man die folgende Hesseform der Gleichung von  $\mathfrak{E}$ :

$$\frac{1}{3} \cdot (x - 2y + 2z - 9) = 0;$$

Einsetzen der Koordinaten von  $D$  in die linke Gleichung der Hesseform liefert - eventuell mit negativem Vorzeichen - den gesuchten Abstand von  $D$  zu  $\mathfrak{E}$ :

$$d(D, \mathfrak{E}) = \left| \frac{1}{3} \cdot (x - 2y + 2z - 9) \right| = \frac{1}{3} \cdot |2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 9| = 3.$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  beträgt 3 Flächeneinheiten, das Volumen des Tetraeders beträgt 3 Volumeneinheiten.

- 2d) Da die Ebene  $\mathfrak{F}$  durch den Ursprung verläuft, sind die Ortsvektoren von  $A$  und  $D$  gleichzeitig Richtungsvektoren der Ebene. Ihr Normalenvektor  $\mathbf{f}$  hat also die Richtung  $\mathbf{a} \times \mathbf{d}$ .

$$\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Winkel  $\alpha$  ergibt sich Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ , also als Winkel zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{f}$  (bzw.  $-\mathbf{f}$ ).

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{f}\|} \quad (\text{oder } -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{f}\|}).$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = (1 \mid -2 \mid 2)^T \cdot (1 \mid 1 \mid -4)^T = 1 - 2 - 8 = -9;$$

$$\|\mathbf{u}\| = 3; \|\mathbf{f}\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4)(-4)} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Somit ist  $\cos(\alpha) = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{f}\|} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \cos(45^\circ)$ ; der Schnittwinkel beträgt  $45^\circ$ .

- 2e) Die Schnittgerade liegt in  $\mathfrak{E}$  und in  $\mathfrak{F}$ , ihr Richtungsvektor  $\mathbf{t}$  ist also orthogonal den Normalenvektoren dieser Ebenen, also ein Vielfaches von  $\mathbf{u} \times \mathbf{f}$ . Da der Punkt  $A$  in beiden Ebenen liegt, muss auch die Schnittgerade durch  $A$  verlaufen. Als Parameterdarstellung für die Gerade  $s$  erhält man daher  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r(\mathbf{u} \times \mathbf{f})$ .

$$\mathbf{u} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{Ergebnis für } s: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- 2f) Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  ist einerseits  $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_C$ , er ergibt sich andererseits als  $\frac{1}{2} \|(\mathbf{c}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{b}-\mathbf{a})\|$ .

Wegen  $\overline{AB} = \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$  erhält man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für den Flächeninhalt und anschließendes Auflösen nach  $h_C$ :  $h_C = \frac{\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}$ .

Da  $h_C$  den Abstand von  $C$  zur Geraden durch  $A$  und  $B$  angibt, hat man damit die gesuchte Formel gefunden:

Wenn  $k$  die Gerade durch  $A$  und  $B$  ist, dann gilt:  $d(C; k) = \frac{\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}$ .

- A 3:** Es sei  $V$  die Menge der stetigen Funktionen mit Definitionsbereich  $[0; 1]$ . Bekanntlich kann man Funktionen addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren.
- a) Gib die Eigenschaften eines Vektorraums an und zeige, dass  $V$  mit der üblichen Addition von Funktionen und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen Vektorraum bildet.
- b) Für zwei Elemente  $f, g$  aus  $V$  definiert man:  $f * g := \int_0^1 f(x) g(x) dx$ .  
Stelle zusammen, welche Eigenschaften das Skalarprodukt in einem Vektorraum hat, und zeige, dass die obige Definition ein Skalarprodukt in  $V$  erzeugt.
- c) Gib an, wie man in einem Vektorraum mit Skalarprodukt eine Norm erzeugt, und formuliere die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.  
Welche Ungleichung (für Integrale) folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den Raum  $V$  ?

- L 3:** a) Die Lösung zu diesem Aufgabenteil wird nachfolgend nur knapp dargestellt: Ein Vektorraum ist eine Menge  $M$ , für die zwei Verknüpfungen erklärt sind, die beide als Ergebnisse stets wieder Elemente aus  $M$  liefern. Bei der ersten, die als *Addition* bezeichnet wird, werden zwei Elemente von  $M$  verknüpft, bei der zweiten wird jeweils eine reelle Zahl mit einem Element von  $M$  verknüpft, wobei diese Verknüpfung als *Multiplikation* bezeichnet wird.

$M$  ist mit den beiden angegebenen Verknüpfungen ein Vektorraum, wenn  $M$  bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe ist und für beliebige reelle Zahlen  $r, s$  und beliebige Elemente  $a, b, c$  von  $M$  die Regeln

$$(*) \quad 1 \cdot a = a, r \cdot (s \cdot a) = (rs) \cdot a, (r+s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a, r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b$$

gelten.

Da zwei Funktionen  $f, g$  mit gemeinsamem Definitionsbereich  $D$  genau dann gleich sind, wenn für jedes  $x \in D$  die reellen Zahlen  $f(x)$  und  $g(x)$  gleich sind, überträgt sich die Gültigkeit der bei (\*) aufgezählten Regeln unmittelbar von den reellen Zahlen auf den Raum  $V$ .

Aus dem gleichen Grund gelten auch - für den Nachweis der Gruppeneigenschaften erforderlich - Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition.

Da schließlich die Summe von stetigen Funktionen und das  $r$ -fache einer stetigen Funktion wieder stetige Funktionen sind, erfüllt  $V$  auch die erforderliche Abgeschlossenheitsbedingung für die Verknüpfungen. Insbesondere sind auch die Nullfunktion und das  $-1$ -fache einer stetigen Funktion stetig; daher gibt es in  $V$  auch ein neutrales Element der Addition und zu jedem Element ein Gegenelement.

- b) Ein Skalarprodukt in einem Vektorraum  $M$  ordnet jedem Paar  $a, b$  von Elementen aus  $M$  eine reelle Zahl - geschrieben als  $a * b$  - zu, wobei für alle  $a, b, c$  aus  $M$  und alle reellen Zahlen  $r$  die folgenden Rechenregeln gelten:

$$[1] \quad a * b = b * a$$

$$[2] \quad a * a \geq 0; \text{ wobei Gleichheit nur für } a = 0 \text{ eintritt,}$$

$$[3] \quad a * (b+c) = a * b + a * c$$

$$[4] \quad (ra) * b = r(a * b)$$

Die Definition ist zunächst einmal sinnvoll, das das Produkt zweier stetiger Funktionen wieder eine stetige und damit integrierbare Funktion ist. Das Integral existiert also und liefert eine reelle Zahl.

Zu [ 1 ] Das folgt aus dem Kommutativgesetz der Multiplikation in  $\mathbb{R}$ :

$$f * g = \int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 g(x) f(x) dx = g * f$$

Zu [ 2 ] Das Integral einer nirgends negativen Funktion ist nicht negativ, da keine Untersumme negativ ist.

Das Integral einer nirgends negativen stetigen Funktion beträgt nur dann null, wenn es sich bei der Funktion um die Nullfunktion handelt; das war eine unmittelbare Folgerung aus dem Positivitätssatz für Grenzwerte und der Isotonie des Integrals.

Zu [ 3 ] Das folgt aus dem Distributivgesetz in  $\mathbb{R}$  und der Additivität des Integrals:

$$\begin{aligned} f * (g+h) &= \int_0^1 f(x) \cdot (g(x)+h(x)) dx = \int_0^1 (f(x)g(x)+f(x)h(x)) dx \\ &= \int_0^1 f(x) g(x) dx + \int_0^1 f(x) h(x) dx = f * g + f * h. \end{aligned}$$

Zu [ 4 ] Das folgt aus dem Assoziativgesetz für die Multiplikation in  $\mathbb{R}$  und der Homogenität des Integrals:

$$(rf) * g = \int_0^1 (rf(x)) \cdot g(x) dx = \int_0^1 (r(f(x)g(x))) dx = r \int_0^1 f(x) g(x) dx = r(f * g) .$$

Damit ist gezeigt, dass durch die angegebene Funktion in  $V$  ein Skalarprodukt erzeugt wird.

(3) Wenn  $M$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist, definiert man für ein Element  $a$  aus  $M$  die Norm von  $a$  (in Zeichen  $\|a\|$ ) auf folgende Weise:

$$\|a\| := \sqrt{a * a} .$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt in einem Vektorraum mit Skalarprodukt für Vektoren  $a, b$  stets:  $|a * b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  .

Dies entspricht im vorgelegten Raum  $V$  der Definition:

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} .$$

Die Cauchy-Schwarzschen Ungleichung hat dann die folgende Form:

$$\left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(x) dx} .$$