Gymnasium Leichlingen

2006 12M Lö 2004/2005.1 2/2 Klausur Nr. 2 Dienstag, 2005-01-11

3*45'. *Verwendete Sätze sind ausführlich anzugeben.*

A 1: Entscheide bei jeder der folgenden zwanzig Aussagen, ob sie richtig (das heißt immer richtig) oder falsch ist

1	Jede stetige Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist, hat mindestens einen Fixpunkt.
2	Jede auf einem offenen Intervall definierte, stetige Funktion hat Minimum und Maximum.
3	Für eine über [a;b] differenzierbare Funktion mit f(a) = f(b) gibt es immer eine Stelle c mit $f'(c) = 0$.
4	Eine differenzierbare Funktion kann höchstens einen Fixpunkt haben.
5	Für positive Zahlen x und y gilt stets $\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y)$.
6	Der natürliche Logarithmus der Wurzel aus e ist 0,5.
7	Ist f differenzierbar und $h = f{\cdot}f$, dann sind alle Nullstellen von f auch Nullstellen von h'.
8	Für jede positive Zahl x gilt $\ln(x) + \ln(\frac{1}{x}) = 0$.
9	Für jede positive reelle Zahl gilt $\ln(x) \cdot \ln(\frac{e}{x}) = 1$.
10	Definitionsbereich von exp ist $\mathbb{R}$.
11	Wenn die Ableitung einer über [a;b] definierten Funktion f überall negativ ist, ist f antiton.
12	Eine Funktion, die über einem Intervall positive und negative Werte annimmt, hat mindesten eine Nullstelle.
13	Wenn f über [a;b] differenzierbar ist, gibt es zu jeder Sekante des Graphen von f eine dazu parallele Tangente.
14	Der Graph der Funktion exp ist durchgehend streng monoton steigend und linksdrehend.
15	Für jede reelle Zahl x gilt $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$.
16	Die Funktion exp hat keine Nullstellen.
17	Wenn für eine Funktion f aus x = y stets folgt f(x) = f(y), dann ist f injektiv.
18	Wenn die über [a;b] differenzierbare Funktion f überall die Ableitung null hat, ist f konstant.
19	Eine konstante Funktion kann höchstens einen Fixpunkt haben.
20	Für jede reelle Zahl x gilt $\exp(x) \cdot \exp(\frac{1}{x}) = e$.

A 2: Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ und dem Definitionsbereich $\mathbf{D}_f = [\,0; 5\,]$.

a) Zeige, dass f injektiv ist und $\mathbf{D}_f$ in sich abbildet. (D.h.: $x \in \mathbf{D}_f \Longrightarrow f(x)$ in $\mathbf{D}_f$)

b) Begründe mit Hilfe von a), dass f mindestens einen Fixpunkt hat, und zeige unter Verwendung der Ableitung von f, dass f keine zwei Fixpunkte haben kann.

c) Berechne den Fixpunkt von f.

A 3: Beweise durch vollständige Induktion für $q \in]\,0;1\,[$ und $n \in \mathbb{N}^*$ die folgenden beiden Formeln: a) $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$ b) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

A 4: Aus würfelförmigen Bauklötzen unterschiedlicher Größe soll ein Turm gebaut werden. Der unterste Klotz hat die Kantenlänge 1dm; jeder weitere zum Bau verwendete Klotz hat die 0,8 - fache Höhe des vorhergehenden Würfels.
Die Höhe des aus n Klötzen bestehenden Turms wird mit h_n bezeichnet.

a) Berechne h_1, h_2 und h_3.
b) Zeige, dass die Menge $H = \{ h_1, h_2, h_3, \dots \}$ nach oben beschränkt ist.
c) Bestimme das Supremum von H.

A 5: Von zwei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen f und g sei folgendes bekannt: $f' = g$; $g' = f$; $f(0) = 1$; $g(0) = 0$.

a) Beweise: Für jede reelle Zahl x gilt $f^2(x) - g^2(x) = 1$.
b) Beweise: Das Minimum von f ist 1.
(Tipp: Zeige zuerst, dass für alle x gilt $f^2(x) \geq 1$)
c) An jeder Stelle x erfüllen die Funktionen f und g die beiden folgenden Gleichungen; (1) $f(x) + g(x) = \exp(x)$; (2) $f(x) - g(x) = \exp(-x)$.
Beweise die Richtigkeit der Gleichung (1).
d) Bestimme mit Hilfe von (1) und (2) den Funktionsterm von g .

A 6: Beweise, dass für jede positive Zahl z die Ungleichung $\ln(e+z) \leq 1 + \frac{z}{e}$ gilt.
Anleitung: Wende auf $f(x) = \ln(e+x)$ den Mittelwertsatz über $[\,0\,;\,z\,]$ an.

A Z: Untersuche unter Verwendung der in A5 ermittelten Funktionsgleichung von g die Symmetrieeigenschaften des Graphen von g.