

A 1 Von einer auf dem Intervall $[-2; 2]$ definierten Funktion g mit der Nullstellenmenge $O_g = \{-2, 0, 1\}$ wird vorausgesetzt $g'(0) = 2$, $g(2) = 8$. Mit F wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von g und der x -Achse bezeichnet.

- 1a) Untersuche die Vorzeichenbereiche von g und gib mit Integralen ohne Verwendung von Betragstrichen einen Ansatz für die Berechnung von F an. Begründe diesen Ansatz.

Lösung:

Da die Funktion ihr Vorzeichen nur an Nullstellen ändern kann, gibt es die Vorzeichenbereiche $]-2; 0[$, $]0; 1[$ und $]1; 2]$. Wegen $g'(0) = 2 > 0$ wechselt das Vorzeichen von g an der Stelle 0 von negativ zu positiv; über $]-2; 0[$ ist g daher negativ, über $]0; 1[$ positiv und - wegen $g(2) = 8 > 0$ - auch über $]1; 2]$ positiv. An der Stelle 1 findet also kein Vorzeichenwechsel statt. Über einem Intervall ohne Vorzeichenwechsel ergibt sich der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse als Betrag des Integrals der Funktion über dem jeweiligen Intervall. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenfelder erhält man daher:

$$F = - \int_{-2}^0 g(x) dx + \int_0^2 g(x) dx.$$

- 1b) Bestimme für die über dem Intervall $[-2; 2]$ definierte Kurvenschar g_t mit der Funktionsgleichung $g_t(x) = x^4 + (1-t)x^3 - (2+t)x^2 + 2tx$ den Parameter t so, dass die zugehörige Kurve im Schnittpunkt mit der y -Achse die Steigung 2 hat, und zeige, dass die zugehörige Funktion g_t dann alle in Aufgabenteil a) angegebenen Eigenschaften hat.

Berechne für diese spezielle Funktion den Flächeninhalt F .

Lösung: Es ist $g'_t(x) = 4x^3 + 3(1-t)x^2 - 2(2+t)x + 2t$, also $g'_t(0) = 2t$; aufgrund der Bedingung $g'(0) = 2$ ist mithin $t = 1$.

Die gesuchte Funktion hat also die Gleichung $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$.

Die Bedingung $g(2) = 8$ ist - wie Einsetzen zeigt, erfüllt. Mit Hilfe von Polynomdivision gelangt man ausgehend von $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ zu der Linearfaktorzerlegung $g(x) = x \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$, womit auch die angegebene Nullstellenmenge bestätigt wird.

Gemäß dem in Ansatz aus Aufgabenteil a) für F ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= - \int_{-2}^0 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx \\ &= - \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2 \right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

- 1c) Nun sei speziell $f = g_0$, also $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$. Über dem Intervall $[1, 2]$ wird zusätzlich die Funktion h mit der Zuordnungsvorschrift $h(x) = 3 - \frac{3}{x}$ betrachtet. Zeige, dass der Graph von h in seinem Anfangspunkt den Graphen von f berührt.

Gib die Gleichung der im Anfangspunkt der Graphen angelegten gemeinsamen Tangente t an.

Lösung: Zum Nachweis der Berührung ist zu zeigen: $f(1) = h(1)$ und $f'(1) = h'(1)$.

Einsetzen in die Funktionsgleichungen liefert unmittelbar $f(1) = 0 = h(1)$.

Aufgrund der Ableitungen $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x$ und $h'(x) = \frac{3}{x^2}$ ergibt sich - wieder durch Einsetzen in die Funktionsgleichungen: $f'(1) = 3 = h'(1)$.

Damit ist die Berührung der beiden Graphen gezeigt.

Die gemeinsame Tangente ist die Gerade durch den Punkt $(1 | 0)$ mit der Steigung 3; die Tangentengleichung lautet also $y = 0 + 3 \cdot (x - 1)$ bzw. $y = 3x - 3$.

- 1d) Bestimme die zweiten Ableitungen von f und h , untersuche deren Vorzeichen und weise hiermit nach, dass die Tangente t überall zwischen den beiden Graphen von f bzw. h verläuft. Begründe damit, dass der Graph von f an keiner Stelle des Intervalls $[1, 2]$ unterhalb des Graphen von h verläuft.

Lösung: Die zweiten Ableitungen sind $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ und $h''(x) = -\frac{6}{x^3}$.

Für $x > 0$ ist $h''(x)$ offensichtlich negativ; der Graph von h dreht also nach rechts.

Weil für $x > 1$ der Ausdruck $12x^2 + 6x - 4$ stets ≥ 14 , also insbesondere positiv ist, dreht der Graph von f nach links. Die Graphen von f und g drehen also von der (nichtgekrümmten) Tangente nach links bzw. nach rechts weg. Somit verläuft die Tangente zwischen beiden Graphen.

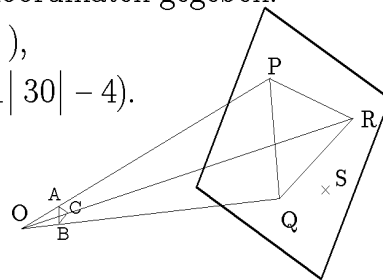
Da die Tangente den von der nach oben wegdrehenden Graphen von f vom Graphen von h trennt, verläuft insbesondere der Graph von h nirgends oberhalb des Graphen von f .

A 2: Die Punkte A, B, C, P, Q und S sind durch ihre Koordinaten gegeben:

$$A = (1 \mid 3 \mid 0), B = (1 \mid 2 \mid -2), C = (0 \mid 2 \mid -1),$$

$$P = (12 \mid 36 \mid 0), Q = (11 \mid 22 \mid -22), S = (-11 \mid 30 \mid -4).$$

In einem Kasten (und im Ursprung des Koordinatensystems) befindet sich das Objektiv (O) einer Beobachtungs-Kamera, die durch ein dreieckiges ebenes Fenster ABC auf eine ebene Wand gerichtet ist (s. Skizze). In der Ebene \mathcal{E} der Wand liegen die Punkte P, Q und S. Die Ebene des Fensters, also der Punkte A, B, C, wird mit \mathcal{F} bezeichnet.



2a) Bestimme Parameterdarstellung und Koordinatengleichung von \mathcal{E} und \mathcal{F} .

Lösung:

Mit A als Aufpunkt hat die Ebene \mathcal{F} die Parametergleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + s(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Entsprechend hat die Ebene \mathcal{E} mit P als Aufpunkt die Parametergleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + r(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + s(\mathbf{s} - \mathbf{p}).$$

Man erhält daher die folgenden Parameterdarstellungen der Ebenen \mathcal{F} und \mathcal{E} :

$$\mathcal{F}: \mathbf{x} = (1; 3; 0)^T + r \cdot (0; -1; -2)^T + s \cdot (-1; -1; -1)^T,$$

$$\mathcal{E}: \mathbf{x} = (12; 36; 0)^T + r \cdot (-1; -14; -22)^T + s \cdot (-23; -6; -4)^T.$$

Normalenvektoren der Ebenen errechnen sich jeweils als Kreuzprodukt aus den jeweiligen Richtungsvektoren. Die Berechnung ergibt:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 23 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 \\ 502 \\ -316 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathbf{a} * \mathbf{n}_{\mathcal{F}} = -1 + 6 + 0 = 5$ und $\mathbf{p} * \mathbf{n}_{\mathcal{E}} = -76 \cdot 12 + 502 \cdot 36 + 0 = 17160$ erhält man als Koordinatengleichungen von \mathcal{F} und \mathcal{E} :

$$\mathcal{F}: -x + 2y - z - 5 = 0; \quad \mathcal{E}: -76x + 502y - 316z - 17160 = 0.$$

2b) Die Kamera erfasst auf der Wand eine dreieckige Beobachtungsfläche. Bestätige, dass P und Q zwei Ecken dieses Dreiecks sind, und bestimme die Koordinaten der dritten Ecke R; berechne die Größe der Beobachtungsfläche PQR.

Lösung:

Da P und Q gemäß Aufgabenstellung in der Beobachtungsebene liegen, ist nur zu zeigen, dass sie jeweils auf einem der Strahlen liegen, die von O aus durch eine Fensterecken verlaufen. Der Strahl durch A trifft Punkte mit Ortsvektoren der Form $r \cdot \mathbf{a}$, also $(r; 3r; 0)^T$; für $r = 12$ ergibt sich damit der Ortsvektor von P; entsprechend trifft der von O ausgehende Strahl durch B den Punkt Q, wie die Gleichung $\mathbf{q} = (11; 22; -22)^T = 11 \cdot (1; 2; -2)^T = 11\mathbf{b}$ zeigt.

Der Punkt R ist der Schnittpunkt der Ursprungsgeraden durch C mit \mathfrak{E} .

Seine Koordinaten $r \cdot 0$, $r \cdot 2$, $r \cdot (-1)$ erfüllen die Koordinatengleichung von \mathfrak{E} , so dass gilt: $-76 \cdot 0 + 502 \cdot 2r - 316 \cdot (-r) - 17160 = 0$, also $1320r = 17160$; $r = 13$.

Damit ist $R = (0 \mid 13 \cdot 2 \mid 13 \cdot (-1))$, also $R = (0 \mid 26 \mid -13)$.

Der Flächeninhalt F des Dreiecks PQR berechnet sich als $\frac{1}{2} \|(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \times (\mathbf{q} - \mathbf{r})\|$.

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = (12; 10; 13)^T \times (11; -4; -9)^T = (-38; 251; -158)^T.$$

$$\text{Somit ist } F = \frac{1}{2} \|(-38; 251; -158)^T\| = \frac{1}{2} \sqrt{38^2 + 251^2 + 158^2} = \frac{1}{2} \sqrt{89409}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks PQR beträgt also ca. 149,51 Flächeneinheiten.

- 2c) Zeige, dass das Fenster ABC einen rechten Winkel hat, und bestimme die Größe des Winkels PRQ.

Lösung: Die Seiten des Dreiecks ABC haben die Richtungen $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (0; -1; -2)^T$, $\mathbf{c} - \mathbf{b} = (-1; 0; 1)^T$, $\mathbf{a} - \mathbf{c} = (1; 1; 1)^T$. Das Skalarprodukt von $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ ist $-1 + 1$, also null, somit sind die Richtungen der Seiten AC und BC orthogonal; der Winkel an der Ecke C ist also ein rechter.

Bezeichnet man die Größe des (nicht orientierten) Winkels PRQ mit α , so gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{p}) * (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{q}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\|}} \\ &= \frac{132 - 40 - 117}{\sqrt{413} \cdot \sqrt{218}} = -0.0833... = \cos(94,779...^\circ). \end{aligned}$$

Die Größe von Winkel PRQ beträgt somit ca. $94,78^\circ$.

- 2d) Begründe mit Hilfe bisheriger Ergebnisse, dass sich die Ebenen \mathfrak{F} und \mathfrak{E} in einer Geraden g schneiden. Gib an, wie der Richtungsvektor von g sowie den Winkel zwischen den beiden Ebenen \mathfrak{F} und \mathfrak{E} zu bestimmen ist.

Zu beschreiben ist lediglich der Lösungsweg; die zugehörigen Rechnungen brauchen nicht durchgeführt zu werden.

Lösung: Die in Aufgabenteil 2a) berechneten Normalenvektoren haben keine proportionalen Komponenten, sind also nicht linear abhängig; daher sind die Ebenen \mathfrak{F} und \mathfrak{E} nicht parallel und schneiden sich somit in einer Geraden.

Da die Schnittgerade in beiden Ebenen verläuft, ist ihre Richtung orthogonal zu beiden Normalenvektoren; ein geeigneter Richtungsvektor für die Schnittgerade lässt sich daher als Kreuzprodukt von $\mathbf{n}_{\mathfrak{F}}$ und $\mathbf{n}_{\mathfrak{E}}$ erhalten.

Der Winkel zwischen Ebenen ist erklärt als Winkel zwischen den Normalenvektoren. Die Berechnung erfolgt analog zum Aufgabenteil 2c) mit $\mathbf{n}_{\mathfrak{F}}$ und $\mathbf{n}_{\mathfrak{E}}$ an Stelle von $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ und $\mathbf{r} - \mathbf{q}$.