Gymnasium Leichlingen; 2*45'

2005 12m$_3$ Lö 2003/2004.2 2/2 Aufgaben/Lösungen der Klausur Nr. 4 von 2004-06-28

A 1: Benutze den Wert deines Taschenrechners für exp(2) und berechne damit einen Näherungswert für exp(2,01), indem du die im Punkte $\big(2|\exp(2)\big)$ an den Graphen der Exponentialfunktion angelegte Tangente als Näherungskurve für den Graphen von exp verwendest.

Lösung: Die Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle c hat die Gleichung: $g(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x - c)$. Wegen exp' = exp ergibt sich daher für die Gleichung der Tangente aus der Aufgabe:

$$g(x) = \exp(2) + \exp(2)\cdot(x - 2),\text{ also } g(x) = \exp(2)\cdot(x - 1).$$

Als Näherungswert für exp(2,01) ergibt sich somit

$$\exp(2{,}01) \approx g(2{,}01) = \exp(2)\cdot 1{,}01 = 7{,}389... \cdot 1{,}01 = 7{,}4629\ ... .$$

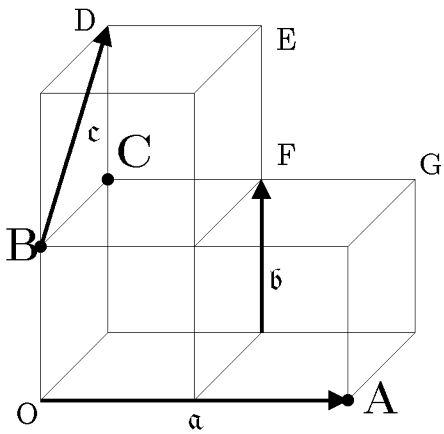
A 2: Berechne mit Hilfe der partiellen Integration das Integral der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (5\,x + 3)\cdot\exp(x)$ über $[\,0; 4\,]$.

Lösung: Die angegebene Regel lautet $\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx$

Mit $g(x) = 5\,x + 3$, $h(x) = \exp(x)$, $a = 0$, $b = 4$ erhält man wegen exp' = exp:

$$\int_0^4 (5\,x + 3)\cdot\exp(x)\,dx = \big[(5\,x + 3)\cdot\exp(x)\big]_0^4 - \int_0^4 5\cdot\exp(x)\,dx = \big[(5\,x - 2)\cdot\exp(x)\big]_0^4$$
$$= 18\cdot\exp(4) + 2\cdot\exp(0) = 18\,e^4 + 2 \approx 984{,}7667\,.$$

A 3: In der Zeichnung rechts sind die Kanten von drei gleich großen aneinander gelegten Würfeln zu sehen. Der Ursprung liegt in der Ecke links unten.



a) Trage in der Zeichnung die Punkte A, B, C ein, zu denen die markierten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gehören.

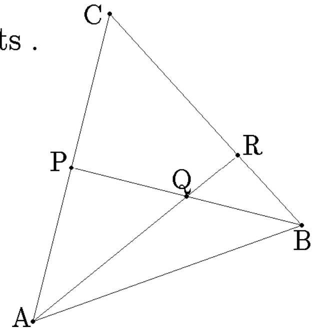
Lösung: Die Punkte sind mit fetten und vergrößerten Bezeichnungen in der Zeichnung eingetragen.

b) Drücke die Ortsvektoren $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ der Punkte D, E, F, G mit Hilfe der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aus.

Lösung: $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\quad \mathfrak{e} = 0{,}5\,\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\quad \mathfrak{f} = 0{,}5\,\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$.

A 4: Im Dreieck ABC ist BP eine Seitenhalbierende mit dem Mittelpunkt Q. R ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und Q mit der Seite BC.

a) Fertige eine ordentliche Skizze an. Lösung: Siehe Skizze rechts .



b) Bestimme das Verhältnis, in dem R die Seite BC von B aus teilt. Lege dazu den Ursprung in den Punkt A.

Lösung:

Alle Ortsvektoren werden mit Hilfe von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dargestellt:

P ist Mittelpunkt von AC: $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{o} + \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{o}) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}$,

Q ist Mittelpunkt von BP: $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + \frac{1}{2}(\mathfrak{p} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\right) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\,\mathfrak{c}$.

R liegt auf BC, also gibt es einen Parameter r, für den $\mathfrak{r} = \mathfrak{b} + r\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$ gilt. Dabei ist r gleichzeitig das gesuchte Teilverhältnis $\overline{BR} : \overline{BC}$.

R liegt auf der Geraden durch A und Q, daher hat der Ortsvektor von R eine Darstellung der Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + s\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{r} = s\cdot\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\,\mathfrak{c}\right)$.

Gleichsetzen der Darstellungen von $\mathfrak{r}$ ergibt $\mathfrak{b} + r\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = s\cdot\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\,\mathfrak{c}\right)$; durch Klammerauflösen und Zusammenfassen erhält man $(1 - r - \frac{1}{2}s)\,\mathfrak{b} = (\frac{1}{4}s - r)\,\mathfrak{c}$.

Da $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ verschiedene Richtungen haben, müssen die Koeffizienten von den Vektoren den Wert null haben. Aus $\frac{1}{4}s - r = 0$ ergibt sich $s = 4r$; Einsetzen in die Gleichung $1 - r - \frac{1}{2}s = 0$ führt zu $1 - r - 2r = 0$, also $r = \frac{1}{3}$.

Ergebnis: Das gesuchte Teilverhältnis beträgt $\frac{1}{3}$.

4c) Berechne die Koordinaten der Punkte P, Q, R für folgende Werte: A = (1 | 0), B = (11 | 5), C = (5 | 14).

Lösung:

P ist Mittelpunkt von AC: $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \binom{1}{0} + \frac{1}{2}\binom{5-1}{14-0} = \binom{3}{7}$; P = (3 | 7).

Q ist Mittelpunkt von BP: $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + \frac{1}{2}(\mathfrak{p} - \mathfrak{b}) = \binom{11}{5} + \frac{1}{2}\binom{3-11}{7-5} = \binom{7}{6}$; Q = (7 | 6).

R liegt auf BC, also gibt es einen Parameter r, für den $\mathfrak{r} = \mathfrak{b} + r\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$ gilt.

R liegt auf der Geraden durch A und Q, also lässt sich der Ortsvektor von R mit einem geeigneten Parameter s in der Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + s\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{a})$ darstellen.

Gleichsetzen der Darstellungen von $\mathfrak{r}$ ergibt $\mathfrak{b} + r\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + s\cdot(\mathfrak{q} - \mathfrak{a})$; setzt man die Komponenten der Vektoren ein, erhält man hieraus:

$$\binom{11}{5} + r\cdot\binom{-6}{9} = \binom{1}{0} + s\cdot\binom{7-1}{6-0},\quad \text{also } r\cdot\binom{-6}{9} - s\cdot\binom{6}{6} = \binom{-10}{-5}.$$

Als Lösung des Gleichungssystems $-6r - 6s = -10$ und $9r - 6s = -5$ ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen $15r = 5$, also $r = \frac{1}{3}$.

Somit ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{b} + \frac{1}{3}(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \binom{11}{5} + \frac{1}{3}\cdot\binom{-6}{9} = \binom{9}{8}$.

Ergebnisse: P = (3 | 7), Q = (7 | 6), R = (9 | 8).

A 5: Von einem Punkt X im Inneren eines Dreiecks ABC werden die Pfeile von X zu A, von X zu B und von X zu C gezeichnet. Die von diesen Pfeilen repräsentierten Vektoren werden mit $\mathfrak{x}_A$, $\mathfrak{x}_B$, $\mathfrak{x}_C$ bezeichnet. Der Punkt X heißt *Schwerpunkt des Dreiecks ABC*, wenn die Summe der Vektoren $\mathfrak{x}_A, \mathfrak{x}_B, \mathfrak{x}_C$ der Nullvektor $\mathfrak{o}$ ist.

Wie ist zu gegebenen Ortsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Vektor $\mathfrak{x}$ zu wählen, damit X Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist?

Lösung:

Der Pfeil von X zu A repräsentiert den Vektor $\mathfrak{a} - \mathfrak{x}$;

daher erhält man ist $\mathfrak{x}_A = \mathfrak{a} - \mathfrak{x}$ und entsprechend $\mathfrak{x}_B = \mathfrak{b} - \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_C = \mathfrak{c} - \mathfrak{x}$.

Die Bedingung $\mathfrak{x}_A + \mathfrak{x}_B + \mathfrak{x}_C = \mathfrak{o}$ ist daher äquivalent zu der Gleichung

$\mathfrak{a} - \mathfrak{x} + \mathfrak{b} - \mathfrak{x} + \mathfrak{c} - \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} - 3\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ und somit $\mathfrak{x} = \frac{1}{3}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.