

# Klausur des Mathematik-Leistungskurses, Abitur 2003

**A 1** Auf  $[-1,0]$  wird durch die Gleichung  $k(x) = \sqrt{1-x^2}$  eine Funktion  $k$  definiert.

- a) Bestimmen Sie die einparametrische Schar  $(g_r)$  der ganzrationalen Funktionen vom Grade  $\leq 3$ , deren Graph bei  $x=2$  die  $x$ -Achse schneidet und den Graphen von  $k$  in seinem rechten Endpunkt berührt.

Ersatzfunktion, falls die Bestimmung von  $g_r$  nicht gelingt:  $g_r(x) = rx^3 - (\frac{1}{4} + 2r)x^2 + 1$ .

- b) Genau eine Funktion  $g$  der Schar  $(g_r)$  hat über  $[0,2]$  das Integral  $\frac{4}{3}$  (Nachweis!). Bestätigen Sie, dass dies die einzige Funktion vom Grade 2 in der Schar  $(g_r)$  ist. Eine Funktion  $f$  wird über  $[-1, 2]$  definiert, indem man die Graphen von  $k$  und von  $g|_{[0,2]}$  zu  $\text{Graph}(f)$  zusammensetzt. Skizzieren Sie  $\text{Graph}(f)$ .
- c) Ermitteln Sie das Interpolationspolynom  $p(x)$  kleinstmöglichen Grades zu  $f$  für die Stützstellen  $-1, 0$  und  $2$  und weisen Sie nach, dass die Graphen von  $p$  und  $g$  außerhalb der Stützstellen keine gemeinsamen Punkte haben.
- d) Durch Rotation des Graphen von  $f$  um die  $x$ -Achse entsteht ein eiförmiger Körper. Berechnen Sie sein Volumen.

**A 2** Eine Ebene  $\mathcal{E}$  hat die Gleichung  $x + 2y - 2z = 0$ . Jeder Punkt  $P$  des Raumes wird an der Ebene  $\mathcal{E}$  zu  $P'$  gespiegelt. Die zugehörige Abbildung der Ortsvektoren des Raumes  $\mathbb{R}^3$  wird mit  $\Phi$  bezeichnet.

- a) Geben Sie einen Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Ebene an und leiten Sie für die betrachtete Abbildung die folgende Gleichung her:  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \cdot \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$ . Erläutern Sie Ihre Herleitung anhand einer Skizze.
- b) Weisen Sie nach, dass die Abbildung  $\Phi$  additiv und homogen ist, und bestimmen Sie die Matrix  $M$  der Abbildung  $\Phi$ .
- c) Berechnen Sie das Produkt  $M \cdot M$  und geben Sie eine geometrische Erklärung für das Ergebnis der Multiplikation.
- d) Die Raumpunkte  $R(47 \mid 20 \mid 38)$  und  $T(45 \mid 18 \mid 36)$  sollen durch einen Streckenzug  $RST$  verbunden werden, wobei  $S$  in der Ebene  $\mathcal{E}$  liegt. Für welche Koordinaten von  $S$  hat der Streckenzug  $RST$  minimale Länge? Lösungstipp: Fertigen Sie eine Skizze an und betrachten Sie zunächst den Streckenzug  $RST'$ .

**A 3** Die Punkte  $A(0 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B(1 \mid 2 \mid 2)$  sowie  $C_t(1 \mid t \mid t^2)$  für  $t \in [-1; 1]$  haben die Ortsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_t$ .

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_t$  für jeden Wert  $t \in [-1; 1]$  ein nicht ausgeartetes Parallelepiped aufspannen, und berechnen Sie sein Volumen  $V(t)$ . Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Wert, den das Volumen annehmen kann.
- b) Die Kante  $OC_t$  bildet mit den Kanten  $OA$  und  $OB$  jeweils einen Winkel  $\alpha_t$  bzw.  $\beta_t$ . Gibt es einen Wert von  $t$ , für den diese beiden Winkel gleich groß sind?
- c) Die Menge aller Punkte  $P$ , für welche die Winkel  $POB$  und  $AOP$  gleich groß sind, wird mit  $\mathfrak{M}$  ("Räumliche Halbierende von Winkel  $AOB$ ") bezeichnet. Klassifizieren Sie  $\mathfrak{M}$ ; beschreiben Sie  $\mathfrak{M}$  durch eine entsprechende Gleichung.
- d) Für die Programmierung eines Computerspiels wird ein Verfahren benötigt, mit dem schnell festgestellt werden kann, ob sich ein Raumpunkt  $Q(x|y|z)$  im Inneren des Parallelepipeds befindet. Beschreiben Sie - ohne die Rechnung durchzuführen - welche Gleichungen hierfür bereitzustellen sind, und welche Bedingung beim Einsetzen von  $x, y, z$  in diese Gleichungen zur Lage von  $Q$  im Inneren des Parallelepipeds äquivalent ist.

## Lösung zu A 1

Zu a) Wegen  $k'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  ist  $k'(0) = 0$ . Das gesuchte Polynom  $g(x)$ , das wegen der Gradbegrenzung die Form  $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  hat, hat die Ableitung  $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Es ergeben sich daher die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a \cdot 8 + b \cdot 4 + c \cdot 2 + d &= 0 && \text{wegen } g(2) = 0, \\ d &= 1 && \text{wegen } g(0) = k(0), \\ c &= 0 && \text{wegen } g'(0) = k'(0). \end{aligned}$$

$g$  hat also die verlangten Eigenschaften, wenn  $d=1$ ,  $c=0$  und  $8a+4b=-1$  gilt.

Daher ist  $b = -\frac{1}{4} - 2a$ ; wählt man also  $r = a$  als Parameter, so ergibt sich:

$$g_r(x) = rx^3 - \left(\frac{1}{4} + 2r\right)x^2 + 1.$$

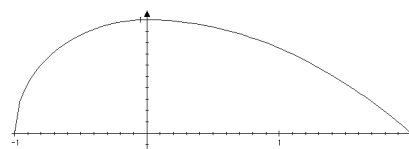
Zu b) Die Bedingung  $\int_0^2 g(x) dx = \frac{4}{3}$  ist äquivalent zu  $\left[\frac{r}{4}x^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + 2r\right)x^3 + x\right]_0^2 = \frac{4}{3}$ .

Einsetzen ergibt  $4r - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}r + 2 = \frac{4}{3}$  und somit  $\frac{8}{3}r = 0$ , also  $r = 0$ .

Die gesuchte Funktion  $g$  hat daher die Gleichung  $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ .

Da  $g_r(x)$  genau dann den Grad 2 hat, wenn  $x^3$  den Koeffizienten 0 hat, also für  $r = 0$ , ist  $g$  in der Schar die einzige Funktion der Schar mit dieser Eigenschaft.

Der Graph von  $f$  setzt sich aus einem Halbkreis und einem Ausschnitt einer nach unten geöffneten Parabel 2. Ordnung mit Scheitelpunkt  $(0|1)$  zusammen. Der Graph hat daher die rechts dargestellte Form.



Zu c) Bei drei Stützstellen ist das Interpolationspolynom vom formalen Grade 2. Wegen  $p(-1) = p(2) = 0$  hat  $p$  die Nullstellen  $-1$  und  $2$ , also hat der Funktionsterm von  $p$  die Form  $p(x) = k \cdot (x+1)(x-2)$ . Durch Einsetzen in diese Gleichung ergibt sich aus  $p(0) = 1$  die Gleichung  $1 = k \cdot 1 \cdot (-2)$ , also  $k = -\frac{1}{2}$ . Das Interpolationspolynom hat daher die Gleichung  $p(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)(x-2)$ .

Durch Gleichsetzen der Funktionsterme von  $p$  und  $g$  ergibt sich eine Gleichung zweiten Grades. Da diese nicht mehr als zwei Lösungen haben kann und die Stützstellen  $0$  und  $2$  nach Konstruktion Lösungen sind, gibt es außer diesen Stützstellen keine weiteren Lösungen der Gleichung und damit keine weiteren Schnittpunkte der Graphen von  $g$  und  $p$ .

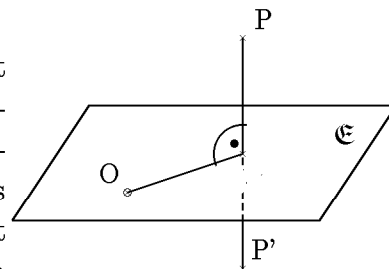
Zu d) Der Rotationskörper setzt sich aus einer Halbkugel und einem Paraboloid zusammen. Für das Rotationsvolumen  $V$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 k^2(x) dx + \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \pi \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2 dx \\ &= \pi \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 + \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right) dx \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \pi \left[ \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x \right]_0^2 = \frac{2}{3}\pi + \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2\right) = \frac{26}{15}\pi. \end{aligned}$$

Das Rotationsvolumen beträgt  $\frac{26}{15}\pi$ , also ca. 5,45 Volumeneinheiten.

## Lösung zu A 2

Zu a) Das absolute Glied der Koordinatengleichung von  $\mathcal{E}$  ist 0;  $\mathcal{E}$  ist also eine Ursprungsebene. Ein geeigneter Normalenvektor ist an der Koordinatengleichung abzulesen:  $\mathbf{u} = (1|2|-2)^T$ . Bezeichnet man den Fußpunkt des von P aus auf die Ebene gefällten Lotes mit F, dann ist  $\mathbf{f} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ . Wegen  $\mathbf{u} \perp \mathbf{f}$  ergibt skalare Multiplikation dieser Gleichung mit  $\mathbf{u}$  die Gleichung  $0 = \mathbf{p} * \mathbf{u} + t\mathbf{u} * \mathbf{u}$ , also  $t = -\frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}}$ .



Somit ist  $\mathbf{f} = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u}$ . Da F der Mittelpunkt der Strecke  $PP'$  ist, lässt sich  $\mathbf{p}'$  auf folgende Weise darstellen:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{p}) = 2\mathbf{f} - \mathbf{p} = 2\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u}\right) - \mathbf{p} = \mathbf{p} - 2\frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u}. \text{ Das war zu zeigen.}$$

Zu b) Zu zeigen ist Additivität und Homogenität der Abbildung  $\Phi$ , also die Gültigkeit der Gleichungen  $\Phi(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{q})$  und  $\Phi(r \cdot \mathbf{p}) = r \cdot \Phi(\mathbf{p})$  für  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, r \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= \mathbf{p} + \mathbf{q} - 2\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q}) * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{q} - 2\frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{q} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{p} - 2\frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{q} - 2\frac{\mathbf{q} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} \\ &= \Phi(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

$$\Phi(r \cdot \mathbf{p}) = r \cdot \mathbf{p} - 2\frac{r \mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{p} - 2r \frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} = r \cdot \left(\mathbf{p} - 2\frac{\mathbf{p} * \mathbf{u}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u}\right) = r \cdot \Phi(\mathbf{p}).$$

Damit ist die Linearität von  $\Phi$  gezeigt.

Die Spalten der Matrix von  $\Phi$  sind die Bilder der Vektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  der kanonischen Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Wegen  $\mathbf{u} * \mathbf{u} = (1|2|-2)^T * (1|2|-2)^T = 1 + 4 + 4 = 9$  ergibt sich für  $i = 1, 2, 3$ :  $\Phi(\mathbf{e}_i) = \frac{1}{9}(9\mathbf{e}_i - 2(\mathbf{e}_i * \mathbf{u}) \mathbf{u})$ ; somit erhält man:

$$\Phi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9}(9\mathbf{e}_1 - 2 \cdot (1|2|-2)^T) = \frac{1}{9}(9-2|0-4|0+4)^T = \frac{1}{9}(7|-4|4)^T,$$

$$\Phi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9}(9\mathbf{e}_2 - 2 \cdot (1|2|-2)^T) = \frac{1}{9}(0-4|9-8|0+8)^T = \frac{1}{9}(-4|1|8)^T,$$

$$\Phi(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9}(9\mathbf{e}_3 - 2 \cdot (-2) \cdot (1|2|-2)^T) = \frac{1}{9}(0+4|0+8|9-8)^T = \frac{1}{9}(4|8|1)^T.$$

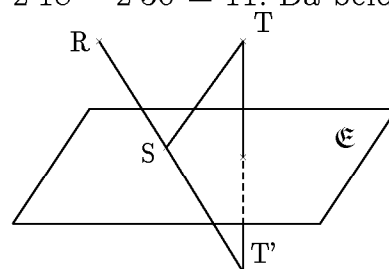
$$\text{Die Matrix von } \Phi \text{ ist also } M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Als Produkt der Matrix M mit sich ergibt sich:

$$\begin{aligned} M \cdot M &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 49 + 16 + 16 & -28 - 4 + 32 & 28 - 32 + 4 \\ -28 - 4 + 32 & 16 + 1 + 64 & -16 + 8 + 8 \\ 28 - 32 - 4 & -16 + 8 + 8 & 16 + 64 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Einheitsmatrix ergibt sich, da die zweifache Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene wieder zum Punkt P führt; die zugehörige Abbildung  $\Phi \circ \Phi$  ist also die identische Abbildung des Raumes  $\mathbb{R}^3$ .

Zu d) Einsetzen der Koordinaten von R und T in die linke Seite der Gleichung von  $\mathcal{E}$  liefert für R:  $47 + 2 \cdot 20 - 2 \cdot 38 = 11$  und für T:  $45 + 2 \cdot 18 - 2 \cdot 36 = 11$ . Da beide Ergebnisse identische Vorzeichen haben, liegen R und T im gleichen Halbraum der Ebene  $\mathcal{E}$ . Bezeichnet man das Spiegelbild von T an der Ebene  $\mathcal{E}$  mit  $T'$ , dann sind die Streckenzüge RST und RST' gleich lang. Der Streckenzug RST' hat aber minimale Länge, wenn S auf der Strecke RT' liegt.



Mit der Matrix aus Aufgabenteil b) erhält man

$$\mathbf{t}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{9}(7 \cdot 45 - 4 \cdot 18 + 4 \cdot 36 \mid -4 \cdot 45 + 18 + 8 \cdot 36 \mid 4 \cdot 45 + 8 \cdot 18 + 36)^T = (43 \mid 14 \mid 40)^T.$$

Die Gerade durch  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{T}'$  hat die Parametergleichung  $\mathfrak{F} = \mathbf{r} + r \cdot (\mathbf{t}' - \mathbf{r})$ .

Die Koordinaten des Punktes  $S(x|y|z)$  haben daher für ein geeignetes  $r \in \mathbb{R}$  eine Darstellung der Form:  $x = 47 - 4r, y = 20 - 6r, z = 38 + 2r$ .

Die Koordinaten von  $S$  erfüllen auch die Ebenengleichung; Einsetzen liefert:

$$47 - 4r + 2(20 - 6r) - 2(38 + 2r) = 0, \text{ also } 11 = 20r \text{ und somit } r = \frac{11}{20}.$$

Damit ist  $S = (47 + \frac{11}{20} \cdot (-4) \mid 20 + \frac{11}{20} \cdot (-6) \mid 38 + \frac{11}{20} \cdot 2) = (44,8 \mid 16,7 \mid 39,1)$ .

### Lösung zu A 3

Zu a) Das Volumen des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_t$  aufgespannten Parallelepiped ergibt sich als Betrag des Spatprodukts der drei aufspannenden Vektoren bzw. der Determinanten mit den Spaltenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_t$ .  $V(t) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_t]| = |2 - t^2| = 2 - t^2$ .

Wegen  $t \in [-1; 1]$  ist  $t^2 \leq 1$ , also  $V(t) > 0$ ; das Tetraeder ist also für keinen zulässigen Wert des Parameters  $t$  ausgeartet.

Dieser Term  $2 - t^2$  mit  $t \in [-1; 1]$  beschreibt einen achsensymmetrischen Ausschnitt einer nach unten geöffneten Normalparabel mit Scheitelpunkt  $(0|2)$  und ganz im positiven Bereich, da die Nullstellen des Terms  $(-\sqrt{2} \text{ und } \sqrt{2})$  nicht im Definitionsbereich liegen.

Der größte Wert wird im Scheitelpunkt angenommen:  $V_{\max} = V(0) = 2$ .

Seinen minimalen Wert nimmt  $V(t)$  in seinen beiden Randpunkten an:

$$V_{\min} = V(-1) (= V(1)) = 1.$$

Zu b) Für die beiden zu betrachtenden Winkel gilt:

$$\cos(\alpha_t) = \frac{\mathbf{c}_t * \mathbf{a}}{\|\mathbf{c}_t\| \cdot \|\mathbf{a}\|} = \frac{t}{\|\mathbf{c}_t\|}; \quad \cos(\beta_t) = \frac{\mathbf{c}_t * \mathbf{b}}{\|\mathbf{c}_t\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{1 + 2t + 2t^2}{\|\mathbf{c}_t\| \cdot 3}.$$

Gleichheit liegt also genau dann vor, wenn  $3t = 1 + 2t + 2t^2$  gilt.

Die äquivalente quadratische Gleichung  $t^2 - 0,5t + 0,5 = 0$  hat keine Lösung, da die Diskriminante  $0,25^2 - 0,5$  negativ ist.

Es gibt also keinen Wert von  $t$ , für den die Winkel  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  gleich groß sind.

Zu c) Bezeichnet man die Koordinaten von  $P$  mit  $x, y, z$  und die betrachteten Winkel mit  $\alpha$  und  $\beta$ , so ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{p} * \mathbf{a}}{\|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{a}\|} = \frac{y}{\|\mathbf{p}\|}; \quad \cos(\beta) = \frac{\mathbf{p} * \mathbf{b}}{\|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{x + 2y + 2z}{\|\mathbf{p}\| \cdot 3}.$$

Genau dann liegt also Gleichheit vor, wenn  $3y = x + 2y + 2z$  gilt. Äquivalenzumformung führt zu  $x - y + 2z = 0$ . Das ist die Gleichung der Ebene durch den Ursprung. Die "Winkelhalbierende"  $\mathfrak{M}$  ist also die Ursprungsebene mit dem Normalenvektor  $(1 \mid -1 \mid 2)^T$ .

Zu d) Das Parallelepiped wird von drei Paaren aus den jeweils beiden parallelen Ebenen durch gegenüber liegende Seiten des Spats bestimmt. Ein Punkt  $Q$  liegt genau dann im Inneren, wenn er in allen drei Fällen jeweils zwischen den beiden Ebenen eines solchen Parallelenpaares liegt. Wenn die Gleichungen zweier paralleler Ebenen mit gleichgerichteten Normalenvektoren aufgestellt werden, dann ist die Lage von  $Q$  zwischen den Ebenen (also auf verschiedenen Seiten der Ebenen) dazu äquivalent, dass sich beim Einsetzen der Koordinaten von  $Q$  in die linken Seiten der Ebenengleichungen Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen ergeben. Genau dann, wenn dies in allen drei Fällen geschieht, liegt der Punkt im Inneren des Parallelepiped.